УДК 536.2:621.078

Т.М. Босенко

ВРАХУВАННЯ РЕЛАКСУЮЧИХ ЕФЕКТІВ У РІВНЯННЯХ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ШВИДКІСНОГО ТИПУ

Наведено уніфіковані представлення екстремальних задач тепломасопереносу з використанням нових структурно-асимптотичних розв'язків. Встановлено особливості врахування релаксаційних ефектів, що виражається збільшенням локальної температури в зоні обробки матеріалів.

Ключові слова: гіперрелаксація процесу, інтегро-диференційне рівняння, теплова пам'ять.

Вступ

Процеси переносу енергії і речовини мають найширше розповсюдження в природі і техніці. Цим пояснюється виключно важливе наукове і практичне значення побудови теорії процесів переносу, встановлення основних закономірностей їх протікання і створення ефективних методів розв'язання задач переносу. Аналітичні методи в теорії теплопереносу дають повну всеосяжну картину процесу або явища, який моделюється. Отримання точних аналітичних розв'язків задач теплопровідності для одношарових і шарових матерілів із змінними по координатах і в часі граничними умовами представляє надважкі математичні труднощі. Аналітичні розв'язання отримані лише для незначного кола окремих часткових задач, до того ж, при вельми суттєвих допущеннях. У зв'язку з цим актуальність розробки нових ефективних аналітичних (наближених аналітичних) методів розв'язання крайових задач для моделювання процесів теплопереносу не викликає сумнівів.

Розв'язання крайових задач, отриманих за допомогою точних аналітичних методів, виражаються складними функціональними рядами, які, як правило, є такими, що повільно збігаються. Наприклад, для знаходження розв'язків крайових задач теплопровідності на початковому етапі впливу за часом у багатьох випадків доводиться використовувати сотні, а інколи і тисячі членів ряду [1]. Такі формули малопридатні для інженерних застосувань і

 ISSN 1562-9945

особливо у випадках, коли розв'язок температурної задачі є проміжним етапом. В зв'язку з цим найбільший інтерес представляють наближені аналітичні методи, що дозволяють отримувати розв'язання, хоча і наближені, але в аналітичній формі, з точністю, у багатьох випадках достатньою для інженерних застосувань. Визначення систем швидкісного типу проводиться з використанням гіперболічних та інтегро-диференційних рівняннях (ІДР). Завдяки цим рівнянням можливе дослідження релаксаційного температурного стану поверхневого шару конструкцій при використанні на практиці матеріалів з модифікованою поверхнею, що реагує на релаксаційні ефекти, спричинені екстремальним впливом на поверхню термічного шару релаксування [2]. Це дозволить в подальшому збільшити час експлуатування приладів з модифікованою поверхнею, зменшити витрати на заміну усього виробу, використовуючи тільки поверхневий шар.

Теоретичні основи нелокальних процесів

Розглядання процесів швидкісного типу зводиться до гіперболічних рівнянь теплопровідності (ГРТ) еволюційного типу [1, 3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\nabla^2 T + \frac{W}{c \cdot \rho} + \frac{\tau_r}{c \cdot \rho}\frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (1)$$

Рівняння (1) використовується для опису високоінтенсивних нестаціонарних теплових процесів, де враховується кінцева швидкість розповсюдження (інерція) тепла. ГРТ (1) поєднує у собі властивості як класичного рівняння теплопровідності, що описує дисипативну передачу енергії, так і хвильового рівняння (друга похідна за часом), що описує розповсюдження незатухаючих хвиль. Це пояснює експериментально спостережувані хвильові властивості процесу теплопереносу у низьких температурах - розповсюдження теплової хвилі з кінцевою швидкістю; віддзеркалення теплової хвилі від теплоізольованої межі; інтерференція теплової хвилі [4, 5]. Моделювання таких процесів обмежимо тільки часами релаксації системи та переходу від релаксування системи до локалізації процесу. Після локалізації процесу виконуються закони рівноважної термодинаміки та прямують до нуля розривно-сингулярні розв'язки в ГРТ. Рівняння для дисипативних потоків (1) описує простий випадок одноступінчатої (або одностадійної) релаксації і не враховує як перехресних, так і просторово-нелокальних ефектів. У загальному випадку система може еволюціонувати до локальної рівноваги, минаючи послідовно декілька стадій з різним часом релаксації, при чому такий процес є просторово-нелокальний [6].

Шар матеріалу, який під час термовпливу знаходиться у нерівноважному стані називатимемо термічний шар релаксування Δ_r (ТШР), що має межі, визначені з умов існування релаксаційних ефектів при екстремальному впливі на матеріали. Релаксування теплової хвилі призводить до сингулярних обурень в матеріалі, шо відображається в рівнянні теплопровідності появою релаксуючого параметру при старших похідних шуканої термодинамічної величини.

Результати дослідження рівнянь з врахуванням параметру нелокальності τ_r та τ_e

При розв'язанні задач такого типу виникає необхідність визначення РТП на проміжках часу релаксації системи при екстремальному протіканні процесу. На даних проміжках відбувається критичний одномірний вплив на шар матеріалу, в результаті чого матеріал піддається руйнівним тепловим впливам та може призвести до термічної нестійкості і подальшому руйнуванню. Важливою особливістю є використання узагальненого закону Фур'є, що враховує ефекти релаксацій, що виражаються у функціях релаксації теплового потоку $\alpha(Fo)$ і внутрішньої енергії $\beta(Fo)$. Наслідком обліку даних функцій приходимо до розуміння теплової пам'яті. Комплекс пам'яті виражається передісторією впливу на матеріал, що з математичної точки зору виражається інтегральною сумою функцій релаксації $\alpha(Fo)$, $\beta(Fo)$, що призводить до розгляду інтегро-гіперболічного рівняння теплопровідності, окремим випадком якого є ГРТ, що не враховує релаксацію внутрішньої енергії. Аналітичний опис ефектів теплової пам'яті ІДР, призводить до сингулярно-розривних ефектів при релаксуванні системи та потребує вивчення поведінки таких систем. З практичної необхідності проведення розрахунків, розглянемо середовища з тепловою пам'яттю на прикладі розповсюдження тепла теплопровідністю тільки в одному напрямку [1, 2]:

 ISSN 1562-9945

$$\tau_{0,\nu}\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial Fo}+Fo_{r,\nu}\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial Fo^2}+\tau_{0,\nu}\int_0^{Fo^*}\beta_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial Fo}ds=$$
$$=\alpha_\nu(0)\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial X^2}+\int_0^{Fo^*}\alpha_\nu(s)\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X^2}ds+W_\nu(X,Fo),\ \nu=\overline{1..m}, \quad (2)$$

де $\tau_{0,\nu}=\tau_{r,\nu}/\tau_{e,\nu}$ – критеріальний множник ІДР, що вказує міру нелокальності процесу. ν – номер шару матеріалу, Fo^* – час локалізації процесу, $Fo=\frac{a\cdot\tau}{R_0^2}$ – безрозмірний час процесу, R_0 – лінійний розмір, $Fo_{r,\nu}=\frac{a\cdot\tau_{r,\nu}}{R_0^2}$ – безрозмірний час релаксації теплового потоку ν-го шару; $Fo_{e,\nu}=\frac{a_\nu\cdot\tau_{e,\nu}}{R_0^2}$ – безрозмірний час релаксації внутрішньої енергії ν-го шару. Існування розв’язків даного рівняння в проміжках релаксації системи у точках розриву – пікових точках процесу, кількість яких прямо залежить від класу функцій релаксації; дослідження розв’язків поза проміжками релаксації системи і визначення стійкості розв’язків для кожного з ТШР матеріалу; удосконалення методів переходу від поля зображення до поля оригіналів із застосуванням операційного обчислення за Лапласом у межах ТШР Δ_r – є дуже важкими задачами та потребують подальшого вивчення [2, 7].

Для рівняння (2) малим параметром є час релаксації теплового потоку – τ_r та час релаксації внутрішньої енергії – $t=\tau_e$[3]. В результаті чого постають труднощі в існуванні та знаходженні розв'язків рівняння (2) з присутністю сингулярності при часах релаксації системи та наявністю додаткових умов на стиках шарів, а також труднощі полягають у переході від зображень до оригіналу шуканої функції $\Theta=\Theta(X,Fo)$ та появи розривного розв’язку в околі критичних точкок – часу релаксації теплового потоку та часу релаксації внутрішньої енергії [8, 9]. У зв’язку з появою точок розриву при $Fo=Fo_{r,\nu}$, $Fo=Fo_{e,\nu}$ вони складаються з трьох доданків і визначаються на трьох проміжках $\Gamma^{+e\nu}=(0,Fo_{e,\nu})$,

$\Gamma^{-e\nu}=\Gamma^{+r\nu}=\left(Fo_{e,\nu},Fo_{r,\nu}\right)$, $\Gamma^{-r\nu}=\left(Fo_{r,\nu},Fo_{\nu}^{*}\right)$, де $Fo^{*\nu}$ – час локалізації процесу. Розв'язок для шарового матеріалу на товшині існування екстремального впливу, представляється для кожного шару ν у вигляді наближених рядів з необхідною точністю [9].

Результати дослідження нелокальних рівнянь

Врахування чинників збурення РТП на шарі релаксування Δ_r передує аналітичне обґрунтування, на висновках яких проводились числові розрахунки. Реалізувавши структурно-аналітичні розв'язки для шарових матеріалів визначення температурних полів при екстремальному впливі, за допомогою операційного обчислення та числової схеми [9] та зобразивши графічно одержані розв'язки рівняння (2) можливо провести порівняльну характеристику локальних та нелокальних процесів у матеріалі. При порівнянні розв'язків параболічного, гіперболічного, та ІДР розв'язків (рис. 1) встановлено, що зміна температури порівняно з початковим її значенням спостерігається лише в тонкому поверхневому шарі матеріалу, глибина якого залежить від закону зміни щільності теплового потоку, тобто вибору релаксаційних фунцій.

Також на початку процесу помітні флуктуаційні збурення, що спостерігаються у рівняннях гіперболічного типу. Це виражається комплексом теплової пам'яті – врахуванням релаксації теплового потоку та внутрішньої енергії.

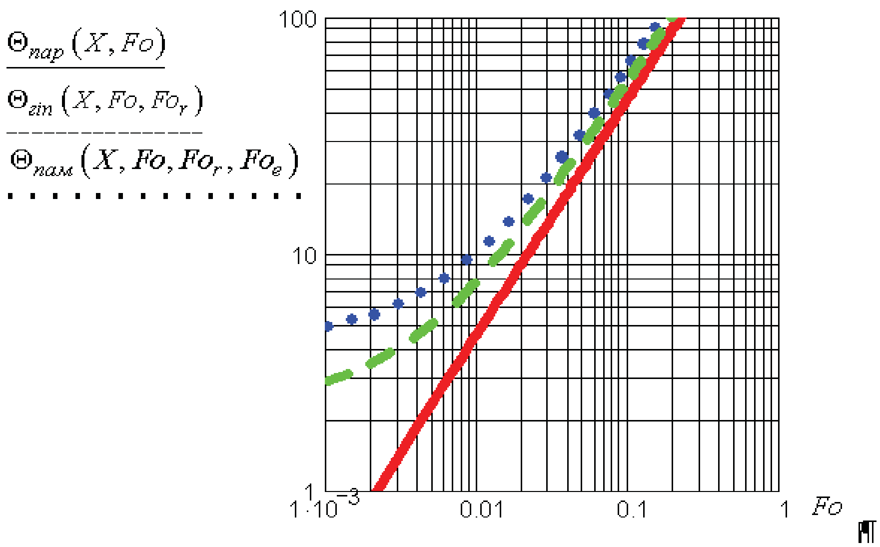

Рис. 1 – Відхилення нерівноважного стану в асимптотичних розв'язках рівнянь швидкісного типу. Розв'язки інтегрального(……), гіперболічного(----) та параболічного (____) рівнянь теплопровідності

 ISSN 1562-9945

Для гіперболічного рівняння характерною особливістю є наявність одного початкового піку (рис. 2), що підтверджується у роботах інших авторів [10]. Це пов’язано із врахуванням тільки функції релаксації теплового потоку.

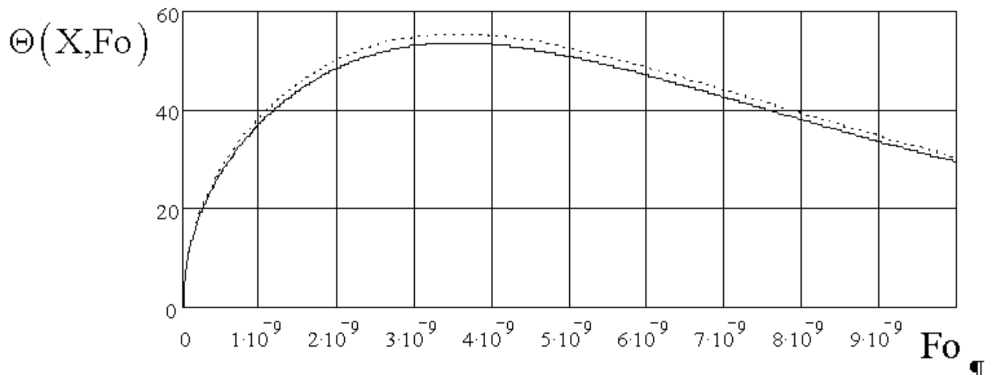

Рис. 2 – Порівняльний аналіз розв'язків ГРТ Davida (……)
та асимптотично-структурного розв’язку (____)

Треба зауважити, що при шаровому матеріалі ефект пам’яті буде поступово зникати, з підвищенням номера шару, це передусім пов’язано із зменшенням релаксаційних процесів у шарі матеріалу, який віддаляється від шару, на який впливають.

Висновки

Результати, отримані з урахуванням ефектів релаксацій, показують, що хвилі, які розповсюджуються в локально-нерівноважних умовах, наділені істотно новими особливостями. У зоні тепловиділення і поблизу неї температура може значно перевищувати рівноважну адіабатичну температуру. Слід враховувати процеси релаксацій, які відрізняються від властивостей тих процесів, які описуються класичними рівняннями локально-рівноважного переносу. Основою для такого аналізу можуть служити різні теоретичні методи опису динаміки систем, що не спираються на принцип локальної рівноваги. Моделі середовищ з пам'яттю є одним з найбільш наочних прикладів таких методів. Пропоновані локально-нерівноважні моделі процесів переносу, з одного боку, знаходяться відповідно до існуючих версій локально-нерівноважної термодинаміки, а з іншого боку, розширюють круг можливих об'єктів досліджень і мають відносно простий вигляд.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карташов Е. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел / Е.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 2001. – С. 204—510.

2. Босенко Т.М. Дослідження та оцінка збіжності асимптотичних розв'язків інтегро-диференціального рівняння теплопровідності за локально-нерівноважних умов / Т.М. Босенко // Вестник ХНТУ. – Херсон. – Вып.2 (35), 2009. С.117-121.

3. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М. : Высш. школа, 1967. – 560 с.

4. Босенко Т.М. Математическое моделирование и исследование решений задач теплопроводности для составных тел с учётом тепловой «памяти» / Т.М. Босенко // Вісник Дніпропетровського університету – Д.: Зб. наук. пр. ДНУ. – 2009. Т.17, №1.

5. Карташов Е.М. Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа / Е.М. Карташов, О. И. Ремизова // РАН Энергетика, 2002. — №3, С. 146—156.

6. Жуков В.П. Фемтосекундная динамика электронов в металлах / В.П. Жуков, Е.В. Чулков // Успехи физ. наук, 2009.—Т. 179, №2. – С. 113—146.

7. Шнип А.И. Теория обобщённых термодинамических систем с памятью /А.И. Шнип //Инж.-физ. журн. – 2002. – Т. 75, №1. – С. 21—31.

8. Босенко Т.М. Дослідження та оцінка збіжності асимптотичних розв'язків інтегро-диференціального рівняння теплопровідності за локально-нерівноважних умов / Т.М. Босенко // Вестник ХНТУ. – Херсон. – Вып.2 (35), 2009. С.117-121.

9. Веселовський В.Б. Розв’язання задач теплопровідності для складених тіл при екстремальних впливах / В.Б. Веселовський, Т.М. Босенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. — Т.14, № 1, – С. 168-179.

10. David J. N. Wall. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves. / J. N. David // J. Math. Phys. 38 (3). March. 1997. – pp. 1723—1749.

 ISSN 1562-9945