УДК 519.210 (075-8)

Д.А. Джамалов

О РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ

Аннотация. Рассматривается вычисление вероятности в зависимости от обобщенной прочности $\tilde{R}$ и от обобщенной нагрузки $\tilde{Q}$. Уточняются выражения для характеристики безопасности γ и коэффициента изменчивости ξ.

Надежность строительных конструкций гарантируется расчетом на прочность и устойчивость, который устанавливает необходимую связь между действующей нагрузкой и прочностью материала конструкции. Полученные при этом соотношения представляются в виде неравенств, ограничивающие область надежных состояний конструкций.

При расчете конструкций на надежность все расчетные величины разделяют на две основные группы – прочности $\tilde{R}$ и нагрузки $\tilde{Q}$. Надежность конструкции будет обеспечена при выполнении с некоторой вероятностью неравенства

$$\tilde{R} - \tilde{Q} > 0 \tag{1}$$

здесь $\tilde{Q}$- обобщенная нагрузка, $\tilde{R}$ - обобщенная прочность конструкции.

Резерв прочности конструкции $\tilde{T}$ - определяется выражением:

$$\tilde{T} = \tilde{R} - \tilde{Q} \tag{2}$$

при этом неравенство (1) получить вид:

$$\tilde{T} > 0 \tag{3}$$

Допустимая вероятность разрушения:

$$V = \int_{-\infty}^{0} P_T(T)dT = P_t(0) \tag{4}$$

где PT(T) – распределение плотности вероятности резерва прочности.

Если заданы красивые распределения $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$, то можно построить кривую распределения $\tilde{T}$, используя формулу [1]:

$$P_T(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_R(T+Q)P_Q(Q)dQ, \qquad (5)$$

здесь $P_R(T)$ - плотность вероятности распределения прочности;

$P_R(T+Q)$ - плотность вероятности с аргументом $(T+Q)$;

$P_Q(Q)$ - плотность вероятности распределения нагрузки.

В выражении (5) R и Q считаются взаимно независимыми случайными величинами. В случае взаимнозависимости R и Q, в P(R, Q) надо заменить R на T+Q:

$$P_T(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,(T+Q,Q)dQ, \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4) получим:

$$V = P_T(0) = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,(T+Q,Q)dQdT \qquad (7)$$

Если в этом выражении верхний предел первого интегрального знака заменить на Q, то под знаком интеграла dT надо заменить на $d(T+Q) = dR$, получим:

$$V = \int\limits_{-\infty}^{Q}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\,(R,Q)dQdR = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{Q} P(R,Q)dRdQ \qquad (8)$$

Аналогично, подставляя формулу

$$P_T(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(R,R-T)dR$$

в (4) получим:

$$V = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R}^{\infty} P\,(R,Q)dQdR \qquad (9)$$

Если параметры $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$ являются взаимнонезависимыми, то вместо формул (8) и (9) можно записать:

$$V = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_Q(Q)\int\limits_{-\infty}^{Q} P_R dRdQ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_Q(Q)P_R(Q)dQ \qquad (10)$$

и

$$V = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_R(R)\int\limits_{R}^{\infty} P_Q(Q)dQdR = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_R(R)\left[1 - P_Q(R)\right]dR = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_R(R)P_Q(R)dR \qquad (11)$$

В этих формулах переменную интегрирования обозначим через X; тогда будем иметь:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} P_Q(x)P_R(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P_R(x)P_Q(x)dx \qquad (12)$$

Функции, стоящие под знаком интеграла (12), можно представлять в виде произведения ординат кривых $P_R(x)$ и $P_Q(x)$, совмещая эти кривые на оси абсцисс X или кривых $P_Q(x)$ и $1 - P_Q(x)$.

При вычислении вероятности разрушения конструкции, удобно ввести в рассмотрение коэффициент запаса, равной отношению математических ожиданий прочности $\bar{R}$ и действующей нагрузки $\bar{Q}$:

$$\xi = \bar{R} / \bar{Q} \qquad (13)$$

При произвольных законах распределения $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$ имеем

$\bar{T} = \bar{R} - \bar{Q}$ - математическое ожидание; (13а)

$\hat{T} = \hat{R} + \hat{Q}$ - дисперсия случайных величин; (13б)

$\hat{T} = \sqrt{\hat{R} + \hat{Q}}$ - стандарт случайной величины $\hat{T}$ (13в)

Отношение $\gamma = \bar{T} / \hat{T}$ - называется характеристикой безопасности

$$\gamma = \frac{\bar{T}}{\hat{T}} = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{\hat{R} + \hat{Q}}} = A_T^{-1} \qquad (14)$$

A_T - коэффициент изменчивости резерва прочности.

Разделяя в правой части (14) числитель и знаменатель на $\bar{Q}$ будем иметь:

$$\gamma = \frac{\frac{\bar{R}}{\bar{Q}} - 1}{\sqrt{\frac{\hat{R}}{\bar{Q}^2} + \frac{\hat{Q}}{\bar{Q}^2}}} = \frac{\xi - 1}{\sqrt{\frac{\hat{R}^2}{\bar{Q}^2} + \frac{\hat{Q}^2}{\bar{Q}^2}}} = \frac{\xi - 1}{\sqrt{A_Q^2 + \xi^2 A_R^2}} \qquad (15)$$

где $A_R = \dfrac{\hat{R}}{\bar{R}}$; $A_Q = \dfrac{\hat{Q}}{\bar{Q}}$ (16)

В частном случае, при нулевой изменчивости прочности ($A_R = 0$) из (15) следует:

$$\xi = 1 + \gamma A_Q \qquad (17)$$

а при нулевой изменчивости нагрузки ($A_Q = 0$)

$$\xi = \frac{1}{1 - \gamma A_R} \qquad (18)$$

ISSN 1562-9945

Из выражения (15), после некоторых преобразований получим квадратное уравнение:

$$\left(1-\gamma^2 A_R^2\right)\xi^2 - 2\xi + 1 - \gamma^2 A_Q^2 = 0 \tag{19}$$

откуда

$$\xi = \frac{1+\sqrt{1-(1-\gamma^2 A_Q^2)(1-\gamma^2 A_R^2)}}{1-\gamma^2 A_R^2} \tag{20}$$

Формулу (20) можно записать в следующем виде:

$$\xi = \frac{1+\sqrt{\gamma^2(A_R^2 + A_Q^2) - \gamma^4 A_R^2} A_Q^2}{1-\gamma^2 A_R^2} \tag{21}$$

Пренебрегая квадратами малых величин A_R, A_Q будем иметь

$$\xi = 1 + \gamma\sqrt{A_R^2 + A_Q^2} \tag{22}$$

Для частных случаев, рассматриваемых выше получим:

при $A_Q = 0$, $\xi = 1 + \gamma A_R$ (23)

и при $A_R = 0$, $\xi = 1 + \gamma A_Q$ (24)

Сравнивая эти формулы соответственно с формулами (18) и (17) убеждаемся в том, что пренебрежение квадратами малых величин при $A_R = 0$ приводит к одному и тому же результату; а при $A_Q = 0$ полученные результаты отличаются друг от друга.

Между нагрузкой и прочностью существует корреляционная связь, которая в зависимости от состояния конструкций носит различный характер.

Положительная корреляционная связь нагрузки с прочностью ($\overset{\frown}{R, Q} > 0$) имеет место в случае когда более прочные элементы с максимальной вероятностью предназначены для больших нагрузок.

В случае когда между $\overset{\frown}{R}$ и $\overset{\frown}{Q}$ существует отрицательная корреляционная связь ($\overset{\frown}{R, Q} > 0$), менее прочные элементы воспринимают большие нагрузки.

Если с помошью смещанной дисперсии удается оценить величину корреляционной связи между $\tilde{R}$ и $\tilde{Q}$, то смещанную дисперсию $\overset{\frown}{R, Q}$ можно ввестив формулы для определения коэффициента запаса ξ.

В общем случае дисперсия резерва прочности $\hat{T}$ выражается формулой:

$$\hat{T} = \hat{R} - 2\overset{\frown}{R, \; Q} + \hat{Q} \tag{25}$$

В таком случае для характеристики безопасности γ вместо формулы (14) будем иметь:

$$\gamma = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{\bar{R} - 2\overset{\frown}{R, \; Q} + \hat{Q}}} \tag{26}$$

а взамен формулы (15)

$$\gamma = \frac{\xi - 1}{\sqrt{A_Q^2 - 2\xi A_{RQ}^2 + \xi A_R^2}} \tag{27}$$

где $A_{RQ} = \sqrt{\dfrac{\overset{\frown}{R, \; Q}}{\bar{R}\bar{Q}}}$

При этом уравнение (19) запишется в виде:

$$(1 - A_{RQ}^2\gamma^2)\xi^2 - 2(1 - \gamma^2 A_{RQ}^2)\xi + (1 - \gamma^2 A_Q^2) = 0 \tag{28}$$

Решением этого уравнения будет:

$$\xi = \frac{1 - A_{RQ}^2\lambda^2 + \sqrt{(1 - A_{RQ}^2\gamma^2)^2 - (1 - \gamma^2 A_Q^2)(1 - A_R^2\gamma^2)}}{1 - \gamma^2 A_R^2} \tag{29}$$

Пренебрегая квадратами малых величин A_R, A_Q, A_{RQ} по сравнению с их первыми степенями будем иметь:

$$\xi = 1 + \gamma\sqrt{A_Q^2 - 2A_{RQ}^2 + A_R^2} \tag{30}$$

Сравнивая это выражение с (22) можно убедится в том, что при существовании корреляционной связи между нагрузкой и прочностью, коэффициент запаса ξ несколько снижается, так как A_{RQ} положительная величина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницин А.Р. Определение коэффициента запаса при нагрузках представляющих собой случайные процессы. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 3

Получено 30.01.2010г.