

ДИСКРЕТНЕ ФУР'Є-ПРОДОВЖЕННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Анотація. В даній статі розглядається алгоритм прогнозування низькочастотної складової часового ряду, який полягає у апроксимації даних сумою гармонічних функцій. Пропонується ітераційний алгоритм оцінювання параметрів моделі низькочастотної складової за допомогою мінімізації функціоналу нев'язки. Експериментальна апробація ефективності запропонованого алгоритму на прикладах фінансово-економічних часових рядів показав достатньо високу точність отриманих прогнозів.

1. Постановка проблеми, завдання дослідження

Задача прогнозування часових рядів різної природи, зокрема фінансово-економічних, є надзвичайно актуальною з огляду на кількість публікацій з даної тематики. Розглядаються підходи до екстраполяції тренду часового ряду аналітичною функцією[1], конструювання моделі відтворення ряду на основі технології нейронних мереж[2], побудова багатofакторних регресійних [3] чи авторегресійних [4] моделей та їх розширений варіант – метод групового урахування аргументів [5]. В даній роботі основною ідеєю побудови прогнозу є дослідження частотних характеристик коливань, наявних у динамічному ряді та екстраполяція ряду сумою гармонічних функцій.

2. Аналіз основних публікацій щодо проблеми дослідження

Задача прогнозування часових рядів на основі частотних складових розглядалися у роботах [6], де запропоновано використання дискретного перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є дає можливість дослідити амплітудно-частотну характеристику сигналу, що досліджується, але має певні недоліки, зв'язані з задачами прогнозування. Зокрема, нульова фаза коливань в перетворенні Фур'є не дає можливість відтворити та спрогнозувати низькочастотний сигнали зі зміщенням фази, які частіше всього зустрічаються у реальних системах. Також спектр частот, кратних 2 не дає можливість порівняно невеликою кількістю доданків ряду

Фур'є представити сигнал з частотою, не кратною 2 до кроку часової дискретизації ряду. Підхід вейвлет-аналізу, запропонований у роботах [7], дає можливість подолати першу з вищезазначених проблем, але залишається проблема неефективності, збитковості кодування частотних складових. В даній роботі пропонується підхід, який дозволяє подолати зазначені проблеми, описуючи сигнал достатньо малою кількістю гармонік (до 10) зі змінною фазою та здійснити прогноз ряду за допомогою екстраполяції аналітичного представлення його частотних характеристик.

3. Цілі статті, постановка задачі

Нехай ряд заданий послідовністю дискретних рівнів зі сталим кроком дискретизації часу Δt . Необхідно побудувати функцію $y(t)$, яка апроксимує задані емпіричні значення, оцінити параметри даної функції та експериментально перевірити ефективність прогнозів часового ряду на основі екстраполяції побудованої функції.

4. Основна частина

У роботах [8] та [9] авторами пропонується підхід до прогнозування часових рядів методом складних ланцюгів Маркова. Метод полягає у виявленні статистичних залежностей у послідовностях змін часового ряду та генерації продовження досліджуваного ряду з використанням виявлених залежностей. Апробація запропонованої методики показала, що прогнозування динамічних рядів за цією методикою дає непогані результати для рядів із високою регулярністю, повторюваністю значень для короткострокових прогнозів. Але при довгостроковому прогнозуванні слід враховувати також низькочастотні коливання у вихідному ряді. Для подолання цієї проблеми вищезазначена модель була вдосконалена введенням низькочастотної апроксимуючої функції виду

$$y_{\text{abs}}(t) = a + bt + \sum_{i=1}^m c_i \sin(d_i t + e_i) \quad (1)$$

або для відносного масштабу:

$$y_{\text{rel}}(t) = ae^{bt} \prod_{i=1}^m c_i \sin(d_i t + e_i). \quad (2)$$

Параметри моделі a , b , c_1, c_2, \dots, c_m , d_1, \dots, d_m , e_1, \dots, e_m мають бути мінімізовані відносно наступного критерію оптимальності:

$$F(a, b, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_m) = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{lin}}(t_0 + i\Delta t))^2, \quad (3)$$

або для відносного варіанту:

$$F(a, b, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m, e_1, \dots, e_m) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{y_i}{y_{\text{lin}}(t_0 + i\Delta t)} \right)^2. \quad (4)$$

При розв'язуванні задач оптимізації, необхідно задати початкові оцінки параметрів, які оптимізуються, а також накласти обмеження на їх значення. Суттєвим обмеженням необхідно піддати частоту d_i . У випадку короткої навчальної вибірки можлива ситуація, коли найкраща апроксимація відповідає неповному гармонічному коливанню. При цьому продовження даної аналітичної кривої може бути не характерним для ряду, що досліджується. Тому необхідною має бути умова відповідності 2-х повних коливань довжині навчальної, тобто частота коливання не може бути нижчою величини $\frac{\pi}{n}$, де n – довжина вибірки навчання. Також обмеження має бути накладене на високі частоти, що пояснюється по-перше, складністю розв'язування задач оптимізації для високих частот, зв'язаними з наявністю великої кількості хибних локальних мінімумів. Емпірично було вибрано обмеження 10 коливань за час навчальної вибірки.

Оскільки число параметрів функції F зростає зі збільшенням числа гармонік m , пропонується ітераційна апроксимація по одній (або двох) гармоніках, обчислення залишків та застосування наступної ітерації до більш високочастотних залишків для одночастинного наближення:

$$r_i(t) = r_{i-1}(t) - (a + bt + c_i \sin(d_i t + e_i)), \quad (5)$$

або для m -частинного наближення:

$$r_i(t) = r_{i-1}(t) - \left(a + bt + \sum_{j=1}^m c_{ij} \sin(d_{ij} t + e_{ij}) \right). \quad (6)$$

Мінімізація нелінійного функціоналу нев'язки (3) або (4) зв'язана з труднощами, спричиненими існуванням декількох локальних мінімумів функції F у просторі значень параметрів. Для подолання цієї проблеми пропонується здійснювати оптимізацію з використанням декількох початкових оцінок значень параметрів. У якості початкових наближень для коефіцієнтів тренду вибираються

коефіцієнти лінійного тренду, визначені за допомогою МНК. Вибирається 2 початкових значення для фази: 0 та π радіан. Це дає можливість підкоректувати фазу апроксимуючої функції як в сторону збільшення, так і в сторону зменшення. Пропонується декілька початкових значень для частоти, вибраних із рівномірною сіткою в інтервалі між мінімальною та максимальною частотою. Емпірично вибрано кількість початкових значень частоти для низькочастотних коливань (перша ітерація, апроксимація безпосередньо вхідного ряду) $nf=3$, для середньочастотних (друга та подальші ітерації) $nf=5$.

5. Експериментальні результати.

Експериментальні результати апроксимації логарифму індексу Доу-Джонса наведені на рис. 1. Як видно з рис. 1, точність апроксимації досить висока, така апроксимація дозволяє виокремити низькочастотну складову ряду, що прогнозується, та отримати стаціонарні з точки зору статистики залишки (рис. 2.) Отримані залишки піддаються аналогічній апроксимації, в результаті чого виділяється наступна низькочастотна складова, наявна в ряді. Таким чином, виконуючи деяку кількість ітерацій даної процедури, отримуємо частотний спектр, який містить виокремлені на кожній ітерації низькочастотні складові.

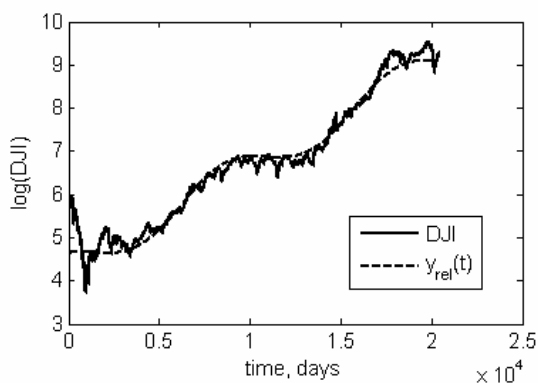


Рисунок 1 - Індекс Доу-Джонса, ітерація 1.

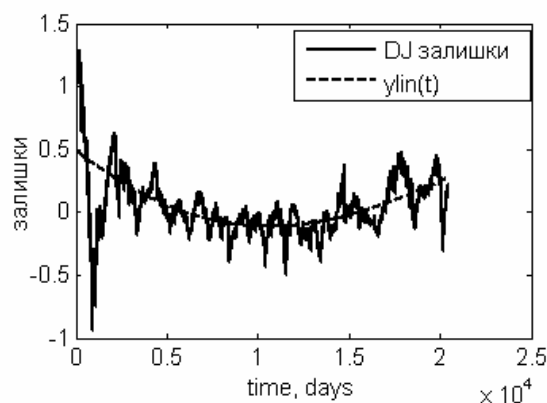


Рисунок 2 - Залишки та їх повторна апроксимація (ітерація 2).

Для прогнозування аналітичну суму гармонічних функцій екстраполюють в часі. На рис. 3. зображені результати прогнозування індексів Доу-Джонса та S&P 500 з різними початковими моментами прогнозу: за 100, 250, 500, 1000, 1500, 2000 днів до кінця відомих даних (останні дані за 12 квітня 2010 року)

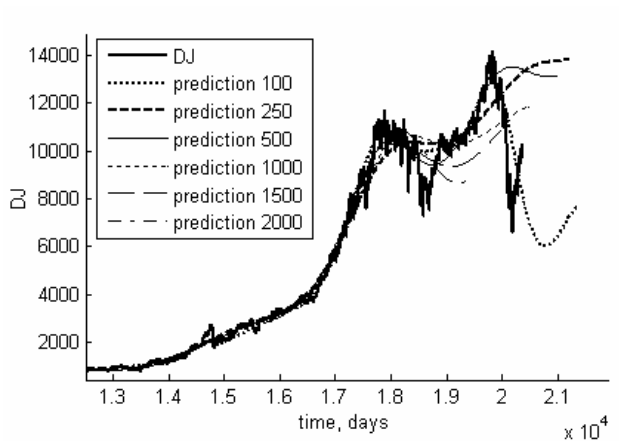


Рисунок 3 - Прогноз індексу Доу-Джонса

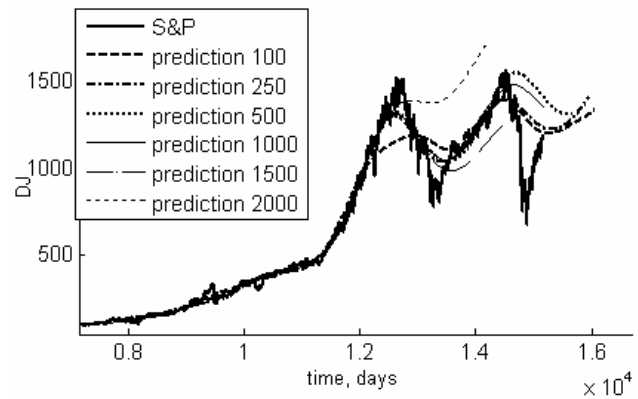


Рисунок 4 - Прогноз індексу S&P 500

Дані результати показують достатньо високу точність прогнозів на низькочастотному рівні.

В середньо- та високочастотному діапазоні коливання відбувались нерегулярно, що погіршує результати прогнозів. Середні відхилення вихідного ряду та прогнозів наведені в таблиці 1. Критерієм якості прогнозу вибраний середній квадрат похибки MSE (7) та MAPE (8):

$$MSE = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2} \quad (7)$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - y(x_i)|}{\bar{y}} \cdot 100\% \quad (8)$$

Помічено, що зі збільшенням точності апроксимації збільшується точність прогнозів. Відхилення від поміченої особливості можуть бути пояснені наявністю кризи на навчальному або прогновному фрагменті, що створює різкі зміни ряду, що досліджується, які погіршують апроксимацію на навчальній вибірці та не дають можливості виявити шукані закономірності. Також кризові явища спричиняють відхилення прогнозів від реального продовження ряду, що може бути пояснене структурними перебудовами в системі, що досліджується. З цього необхідно зробити висновки, що падіння при кризових явищах можуть прогнозуватися наведеною методикою, як видно з рис. 3 та рис. 4, але глибину падіння визначити не вдається.

6. Вплив об'єму вибірки навчання на точність прогнозів.

Одним із параметрів запропонованого алгоритму, є об'єм навчальної вибірки, який задається кількістю значень вхідного ряду, які використовуються для оцінки параметрів функції (1) або (2). На рядах, які представлені значною історією значень, таких як індекс Доу-Джонса та S&P 500 проведена експериментальна апробація запропонованого алгоритму прогнозування з різними довжинами вибірки навчання. Результати експериментальної роботи наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Дослідження впливу довжини навчальної вибірки на результати прогнозування

Індекс	Довжина навчальної вибірки	Похибка оцінювання на вибірці навчання		Довжина прогнозу	Похибки прогнозу	
		MSE	MAPE		MSE	MAPE
DJ	2000	60,894	3,1 %	1000	525,2870	18%
SP	2000	3,25375	2,27%	1000	33,43603	10,25%
DJ	3000	65,0776	3,5%	1000	1520,364	37%
SP	3000	4,53145	2,97%	1000	50,31766	22,3%
SP	4500	5,53694	3,5%	1000	67,47576	14,5%
DJ	4500	56,7211	3,93%	1000	1170,949	29%
SP	7000	7,10203	4,3 %	1000	284,5858	35%
DJ	7000	63,4337	4,8 %	1000	1533,841	27,4%
SP	10500	11,3889	5,5 %	1000	289,8961	28%
DJ	10500	71,2804	6,1 %	1000	584,3527	12%

Таблиця 1 містить усереднені результати прогнозування з різними довжинами навчальної вибірки (по 5 експериментів з кожним індексом та вибраною довжиною навчальної вибірки). Оптимальна довжина вибірки навчання для прогнозу в 1000 точок коливається в межах 2000-3000. Даний результат був підтверджений на інших часових рядах, але немає можливості провести на них детальне експериментування через недостатність історичних даних. При довжинах вибірки навчання 3000 отримані приклади прогнозів з MAPE=10,25%, що є дещо вищим за результати при інших довжинах вибірки. Це може бути пояснене наявністю постійної частоти коливань, яка залишилась незмінною на прогнозному фрагменті.

7. Висновки і подальша робота.

Запропоновано новий алгоритм прогнозування часових рядів на основі виявлення частотного спектру. Експериментальна апробація показала ефективність запропонованого методу для прогнозування рядів фінансово-економічної динаміки. У порівнянні з відомими класичними підходами, дана технологія дає можливість передбачати моменти часу, в яких можлива зміна тенденції часового ряду, що є важливим у роботі трейдерів на фінансових ринках. При високій інформативності отриманих прогнозів, про які говорять відповідання локальних мінімумів часових рядів прогнозу та реального продовження, класичні критерії оцінювання точності прогнозу (MSE, MAPE) не дають можливості виокремити дану перевагу методу у порівнянні з іншими методами прогнозування. Тому актуальним є розробка нових критеріїв точності прогнозів, які по-перше адекватно відобразили співпадання точок зміни тренду при прогнозуванні, а по-друге дозволили спростити задачу пошуку оптимальних параметрів моделі. Похибки прогнозів даного методу можуть бути пояснені наступними моментами: 1) наявністю фінансової кризи на проміжку навчання або прогнозування; 2) похибками моделі частот, що спричиняють невідповідність екстремумів; 3) похибками амплітуд коливань, які не є сталими і можуть збільшуватись під час кризи. Для подолання проблем, які були помічені, пропонується здійснення пошук оптимальних коефіцієнтів одночасно за двома гармоніками (модель (6) при $m=2$) з ціллю отримати більш складні їх комбінації (накладання частот, „биття”), що має покращити прогнозні можливості запропонованого методу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Присенко Г. В., Равікович Є. І. Прогнозування соціально-економічних процесів / Присенко Г. В., Равікович Є. І. [Навч. посіб.] — К.: КНЕУ, 2005. — 378 с.
2. Ежов А.А., Шумский С.А. Нейрокомпьютинг и его применения в экономике и бизнесе. / Ежов А.А., Шумский С.А. — М., 1998.
3. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов / Лукашин Ю.П. [Учеб. пособие]. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 416 с.

4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. / Бокс Дж., Дженкинс Г. – М.: Мир, 1974.
5. Зайченко Ю. П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах: учеб. пособие для иностр. студ. вузов, направления "Компьютерные науки" / Зайченко Ю. П.; [М.З. Згуровский (общ.ред.)]. – К.: Слово, 2008. — 344 с.
6. The Fourier Transform and its applications Second edition, revised. / Ronald N. Bravwell. – McGraw-Hill Book Company, 1986.
7. Анушина, Е.С. Вейвлет-теория в задачах прогнозирования [Текст] / Н.Д. Поляхов, И.А. Приходько, Е.С. Анушина, Е.В. Хартян // Изв. СПб ГЭТУ «ЛЭТИ». – 2008. – Вып. 4. – С. 50–54
8. Чабаненко Д.М. Алгоритм прогнозування фінансових часових рядів на основі складних ланцюгів Маркова / Чабаненко Д.М. // Вісник Черкаського університету, Випуск 173. – 2003. – С. 90-102.
9. Фур'є-продовження низькочастотних складових рядів економічної динаміки / В.М. Сапцін, Д.М. Чабаненко / Проблеми економічної кібернетики: Тези доповідей XIV Всеукраїнської науково-методичної конференції (8-9 жовтня 2009 р., м. Харків). – Харків.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2009. – С. 132-133.

Одержано 30.01.2010р.