УДК 519.24:681

А.В. Кошулян, В.П. Малайчук, А.В. Мозговой

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. Проведено исследование по выбору оптимальных порогов сравнения в задаче контроля качества объектов со случайными параметрами на основе критериев минимума вероятности принятия ошибочных решений и минимума условного среднего риска.

Ключевые слова: контроль качества, случайные параметры, ошибки 1-го и 2-го рода, интервал допуска, оптимальные пороги сравнения.

Постановка задачи

Среди множества объектов контроля рассмотрим класс изделий, контролируемые параметры которых по своей физической природе или технологии производства являются случайными величинами. Изделия считаются в норме, если значения контролируемых параметров не выходят за пределы допуска в заданном интервале от H1 до H2. Если бы контролируемый параметр измерялся безошибочно, то решения о состоянии изделия принимались бы следующим образом: изделие считалось бы в норме, при выполнении неравенства $H_1 \le H \le H_2$. Так как параметр H - случайная величина с некоторым законом распределения вероятностей W(H), то вероятность выполнения этого неравенства

$$P(N) = \int_{H_1}^{H_2} W(H)\,dH. \tag{1}$$

Вероятность $P(N)$ - показатель эффективности технологии производства контролируемых изделий, $1 - P(N) = P(Б)$ - вероятность брака. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - выборка измерений параметра, то его оценка $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ случайная величина с законом распределения вероятностей $W(\bar{x}/H)$. Представляется, что если решение о состоянии изделия будет приниматься путем сравнения оценки $\bar{x}$ с двумя порогами H_1^* и H_2^* и если имеет место неравенство $H_1^* \le \bar{x} \le H_2^*$, то изделие должно считаться в норме. Изделия, поступающие на контроль, могут находится в состоянии нормы N или в состоянии брака (не норма) $\bar{N}$, а решения по результатам измерений $\bar{x}$ могут приниматься как норма N^* или не норма (брак) $\bar{N}^*$. Как состояния N и $\bar{N}$, так и решения N^* и $\bar{N}^*$ являются случайными событиями. В рассматриваемом случае результаты контроля представляют собой сложные события, состоящие из сочетания двух событий: NN^*, $N\bar{N}^*$, $\bar{N}\bar{N}^*$, $\bar{N}N^*$. Из них два сложных события $N\bar{N}^*$ и $\bar{N}N^*$ - это ошибочные решения контроля: перебраковка и пропуск брака. Если ввести плату за ошибочные решения $C\left(N\bar{N}^*\right)$ и $C\left(\bar{N}N^*\right)$, тогда математическое ожидание стоимости принятия ошибочных решений (значение среднего риска) можно определить по формуле [1]

$$\bar{C} = C\left(N\bar{N}^*\right)P\left(N\bar{N}^*\right) + C\left(\bar{N}N^*\right)P\left(\bar{N}N^*\right). \qquad (2)$$

Величина $\bar{C}$ характеризует эффективность контроля, а соответствующие вероятности ошибочных решений зависят от порогов H_1^* и H_2^* [2]. Следовательно существует возможность оптимального выбора порогов H_1^* и H_2^*, минимизирующих $\bar{C}$.

Уравнения оптимальности

Предполагается, что если известны законы распределения W(H) и $W\left(\bar{x}/H\right)$, то вероятность принятия правильного решения норма-норма NN^* можно определить по формуле

$$P\left(NN^*\right) = \int_{H_1}^{H_2}\int_{H_1^*}^{H_2^*} W\left(H\right)W\left(\bar{x}/H\right)d\bar{x}dH. \qquad (3)$$

Вероятности принятия ошибочных решений $N\bar{N}^*$ и $\bar{N}N^*$ равны

$$\begin{aligned} P\left(N\bar{N}^*\right) &= P\left(N\right)P\left(\bar{N}^*/N\right) = P\left(N\right)\left[1 - P\left(N^*/N\right)\right] = P\left(N\right) - P\left(NN^*\right), \\ P\left(\bar{N}N^*\right) &= P\left(N^*\right)P\left(\bar{N}/N^*\right) = P\left(N^*\right)\left[1 - P\left(N/N^*\right)\right] = P\left(N^*\right) - P\left(NN^*\right), \end{aligned} \qquad (4)$$

где $P\left(N^*\right)$ - вероятность принятия решения норма N^* равна

$$P\left(N^*\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{H_1^*}^{H_2^*} W\left(H\right)\, W\left(\bar{x}/H\right)d\bar{x}dH = \int_{H_1^*}^{H_2^*} W\left(\bar{x}\right)d\bar{x}. \qquad (5)$$

ISSN 1562-9945

Если ввести обозначения $C_1 = C\left(N\bar{N}^*\right)$ и $C_2 = C\left(\bar{N}N^*\right)$, то для определения среднего риска получим формулу

$$\bar{C} = C_1 \int_{H_1}^{H_2} W(H)\,dH + C_2 \int_{H^*_1}^{H^*_2} W(\bar{x})\,d\bar{x} - (C_1 + C_2) \int_{H_1}^{H_2}\int_{H_1^*}^{H_2^*} W(H)\,W(\bar{x}/H)\,d\bar{x}\,dH. \quad (6)$$

Пороги сравнения при контроле H_1^* и H_2^* выберем из условия минимума среднего риска, т.е. из условия минимума математического ожидания стоимости принятия ошибочных решений.

Условие минимума среднего риска $\bar{C}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ запишем в виде двух уравнений

$$\frac{\partial \bar{C}\left(H_1^*, H_2^*\right)}{\partial H_1^*} = 0, \quad \frac{\partial \bar{C}\left(H_1^*, H_2^*\right)}{\partial H_2^*} = 0.$$

Определив производные, получим

$$\begin{gathered}
(C_1 + C_2) \int_{H_1}^{H_2} W(H)\,W\left(H_2^*/H\right) dH - C_2\, W\left(H_2^*\right) = 0, \\
(C_1 + C_2) \int_{H_1}^{H_2} W(H)\,W\left(H_1^*/H\right) dH - C_2\, W\left(H_1^*\right) = 0.
\end{gathered} \quad (7)$$

Если законы распределения W(H) и $W(\bar{x}/H)$ аппроксимировать плотностью распределения Гаусса

$$W(H) = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(H - H_T)^2}{2\sigma_T^2}\right), W(\bar{x}/H) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - H)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (8)$$

то после вычисления интегралов уравнение (7) представим в виде

$$\Phi\left(\frac{\left(\sigma_T^2 + \sigma_x^2\right)\Delta H_2 + \sigma_T^2 \Delta x_1}{\sigma_x \sigma_T \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_T^2 \Delta x_1 - \left(\sigma_T^2 + \sigma_x^2\right)\Delta H_1}{\sigma_x \sigma_T \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad (9)$$

$$\Phi\left(\frac{\left(\sigma_T^2 + \sigma_x^2\right)\Delta H_1 + \sigma_T^2 \Delta x_2}{\sigma_x \sigma_T \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sigma_T^2 \Delta x_2 - \left(\sigma_T^2 + \sigma_x^2\right)\Delta H_2}{\sigma_x \sigma_T \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad (10)$$

где $\Delta H_1 = H_T - H_1$, $\Delta H_2 = H_2 - H_T$, $\Delta x_1 = H_T - H_1^*$, $\Delta x_2 = H_2^* - H_T$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интеграл вероятности Гаусса.

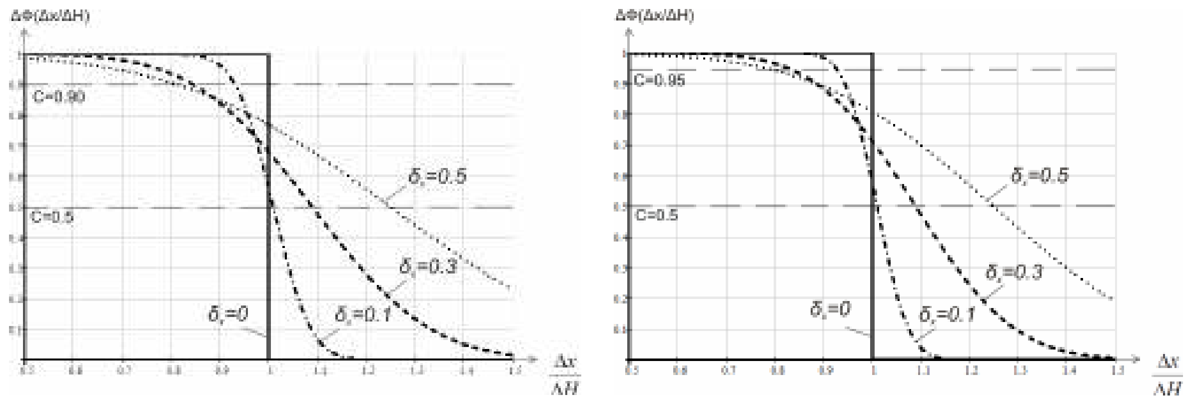
Для симметричных законов распределения $\Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H$,

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ и уравнения (9) и (10) запишутся как одно уравнение

$$\Phi\left(\frac{\Delta H/\sigma_T\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta H}\right)+\left(1+\delta_x^2\right)\right]}{\delta_x\sqrt{1+\delta_x^2}}\right)-\Phi\left(\frac{\Delta H/\sigma_T\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta H}\right)-\left(1+\delta_x^2\right)\right]}{\delta_x\sqrt{1+\delta_x^2}}\right)=\frac{C_2}{C_1+C_2}. \quad (11)$$

Определение и анализ оптимальных порогов контроля

Разность $\Delta\Phi\left(\frac{\Delta x}{\Delta H},\frac{\Delta H}{\sigma_T},\delta_x\right)$ зависит от показателей технологии производства и σ_T и от ошибок измерений контролируемого параметра $\sigma_x/\sigma_T=\delta_x$. На рис.1 показаны графики разности $\Delta\Phi\left(\frac{\Delta x}{\Delta H}\right)$ и решения уравнения (11) для двух вариантов выбора стоимости ошибок С1 и С2: 1) С1 = С2 - критерий минимума вероятности принятия ошибочных решений; 2) $C_1 = P^{-1}(N)$, $C_2 = \left(1-P(N)\right)^{-1}$ - критерий минимума условной стоимости ошибочных решений. В первом случае С = 0,5; во втором С = Р(N).



а) б)

Рисунок 1 - Графическое решение уравнения (11);
а) $P(N)=0.9$; б) $P(N)=0.95$.

В результате графического решения уравнения (11) получены оптимальные значения $\Delta x/\Delta H$ (таб.1).

Как следует из анализа таб.1 оптимальные пороги контроля H_1^* и H_2^* очень зависят от критерия оптимальности 1) для критерия минимума вероятности ошибочных решений (С=0.5) $H_1^* < H_1$ и $H_2^* > H_2$; 2) для критерия минимума среднего риска (С=Р(N)) наоборот $H_1^* > H_1$ и $H_2^* < H_2$. Из таб.1, а также из рис.1 можно

 ISSN 1562-9945

заметить, что для случая C=0.5 пороги H_1^* и H_2^* не зависят от величины P(N) для рассматриваемого диапазона δ_x.

Таблица 1

Оптимальные значения $\Delta x / \Delta H$

C	0.5		P(N)	
δ_x	P(N)		P(N)	
	0.90	0.95	0.90	0.95
0	1	1	1	1
0.1	1.010	1.010	0.932	0.926
0.3	1.090	1.090	0.846	0.827
0.5	1.250	1.250	0.810	0.781

Аналитическое решение для оценки Δx можно получить, если аппроксимировать функцию распределения Гаусса логистическим распределением

$$\Phi^*(\mathbf{x}) = \left[1 + \mathbf{exp}\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathbf{x}\right)\right]^{-1}.$$

Обозначим $a = 1 + \delta_x^2$, $b = \dfrac{\delta_x\sqrt{1+\delta_x^2}}{\Delta H / \sigma_T}$, $z = \Delta x / \Delta H$, $C = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$.

Тогда уравнение (11) запишется в виде

$$\left[1 + \mathbf{exp}\left(-\frac{\pi(z+a)}{b\sqrt{3}}\right)\right]^{-1} - \left[1 + \mathbf{exp}\left(-\frac{\pi(z-a)}{b\sqrt{3}}\right)\right]^{-1} = C. \qquad (12)$$

Представление о точности аппроксимации можно получить из рис.2., где показана исследуемая разность для точного и приближенного решения при $\delta_x = 0.5$.

Среднеквадратическая погрешность аппроксимации, с учетом введенных выше обозначений a, b, z, может быть вычислена по формуле

$$\varepsilon\left(\frac{\Delta H}{\sigma_T}, \delta_x\right) = \sqrt{\frac{\Delta x}{\Delta H} \cdot \int_0^{\Delta x/\Delta H} \left[\Delta\Phi\left(z, \frac{\Delta H}{\sigma_T}, \delta_x\right) - \Delta\Phi^*(z, b, a)\right]^2 dz}. \qquad (13)$$

На рис. 3 изображена среднеквадратическая погрешность (13) при аппроксимации выражения (11) выражением (12) в зависимости от δ_x.

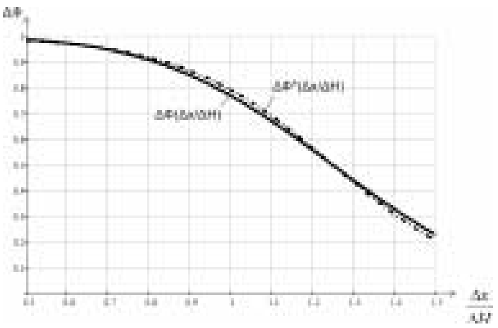


Рисунок 2 - Графическое решение уравнения (11) и уравнения (12) для случая $\delta_x = 0.5$, $P(N) = 0.9$.

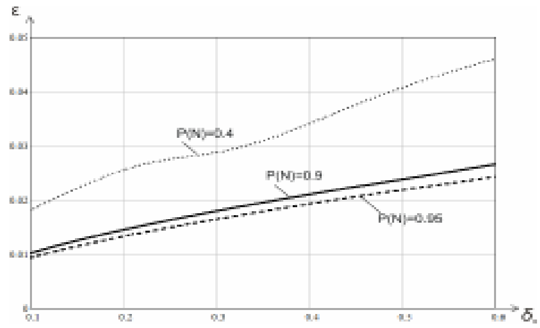


Рисунок 3 - Среднеквадратическая погрешность аппроксимации в зависимости от δ_x для $P(N) = 0.4$; $P(N) = 0.9$; $P(N) = 0.95$.

Если ввести обозначения $y = \mathbf{exp}\left(-\frac{\pi z}{b\sqrt{3}}\right)$, $A = \mathbf{exp}\left(-\frac{\pi a}{b\sqrt{3}}\right)$, то уравнение (12) приводится к виду $y^2 - Dy + 1 = 0$, где $D = \frac{(1-C) - A^2(1+C)}{AC}$. Корни уравнения равны $y_{1,2} = \frac{D}{2} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4} - 1}$.

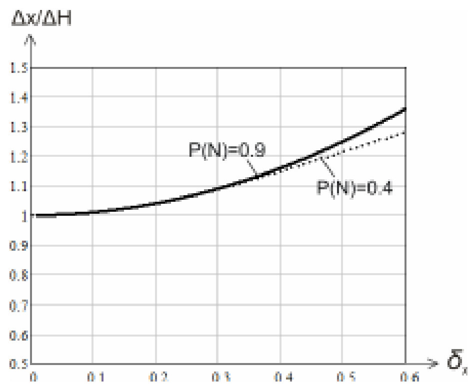
Если C1 = C2 и $C = 0.5$, то $D = A^{-1} - 3A$. Это критерий минимума вероятности принятия ошибочных решений. Если применить критерий условного среднего риска, то $C_1 = P^{-1}(N)$, $C_2 = \left(1 - P(N)\right)^{-1}$ и $C = P(N)$. В этом случае

$$D = \frac{\left(1 - P(N)\right) - A^2\left(1 + P(N)\right)}{A \cdot P(N)}.$$

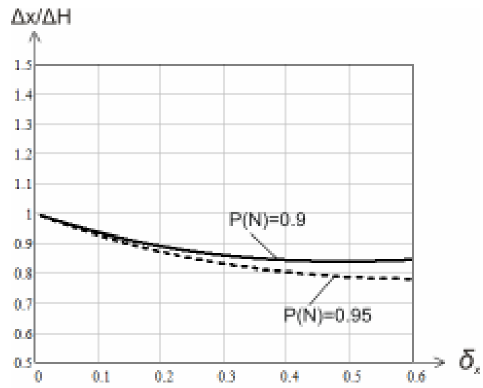
Для известной вероятности $P(N)$ можно определить пороги H_1^* и H_2^* вычислив корень $z_1 = \Delta x / \Delta H = \frac{b\sqrt{3}}{\pi}\mathbf{ln}\left[\left(\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} - 1}\right)^{-1}\right]$ уравнения (12) для известного отношения δ_x. Если использовать приближенную формулу $\sqrt{\frac{D^2}{4} - 1} = \frac{D}{2} - \frac{1}{D}$, тогда для $P(N) = 0.85 \div 0.99$ и $\delta_x = 0 \div 1.0$ выполняется условие $-0.085 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 < -1 < 0.093 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$ и согласно [3] погрешность при использовании приближенной формулы не будет превышать 0.1%. В этом случае корень $z_1 = \frac{\Delta x}{\Delta H} \approx \frac{b\sqrt{3}}{\pi}\mathbf{ln}(D)$.

На рис. 4 представлены зависимости $z_1(\delta_x)$, по которым можно определять оптимальные пороги H_1^* и H_2^* для критериев оптимальности - минимума вероятности и минимума стоимости принятия ошибочных решений. Заметим, что для критерия минимума вероятности принятия ошибочных решений изменение вероятности производственной нормы $P(N)$ практически не оказывает влияния на выбор порогов. Лишь для $P(N) < 0.4 \sim 0.5$ две кривые становятся различимы в рассматриваемом диапазоне δ_x. Однако такие значения вероятности производственной нормы на практике маловероятны, как и маловероятны большие ошибки измерений $\delta_x > 0.6$).

При использовании критерия минимума условной стоимости ошибочных решений на выбор порогов H_1^* и H_2^* оказывает влияние как вероятность производственной нормы $P(N)$ так и σ_x^2- дисперсия измерений параметра H.



а)



б)

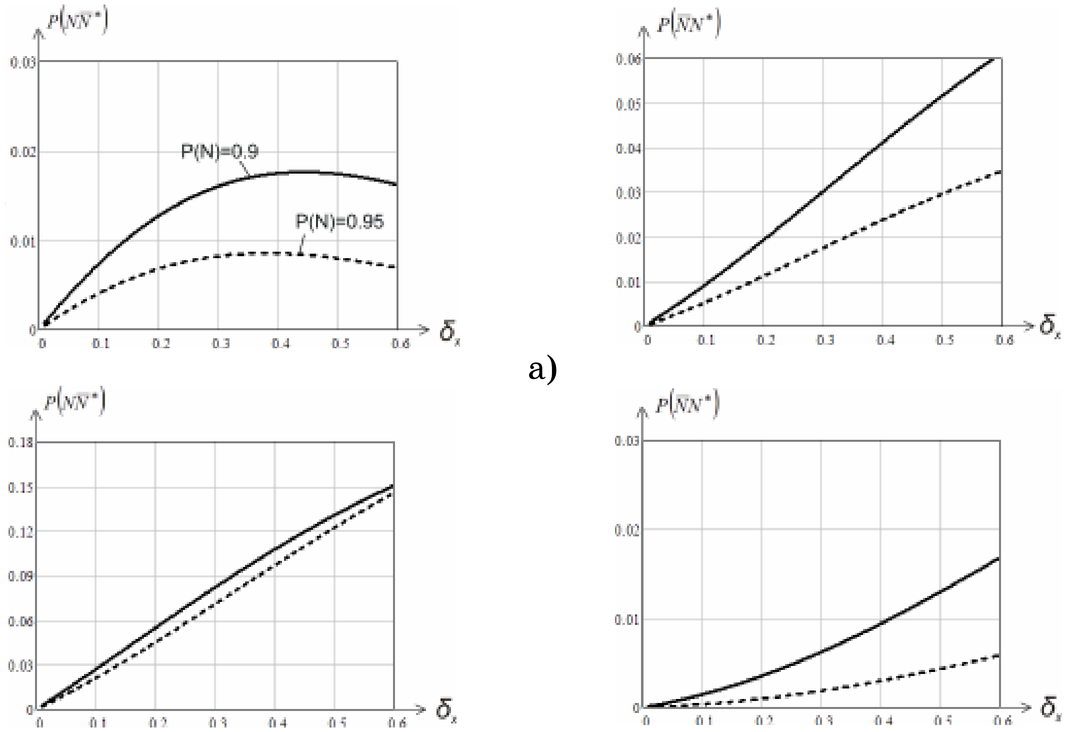
Рисунок 4 - Выбор порогов контроля в зависимости от дисперсии оценки
а) за критерием минимума вероятности принятия ошибочных решений;
б) за критерием минимума условной стоимости ошибочных решений.

Если контролируемые параметры H и их оценки $\bar{x}$ описываются нормальными распределениями, то вероятности, входящие в формулы (4), будут равны [2]

$$P(N) = 2\Phi\left(\frac{\Delta H}{\sigma_T}\right) - 1, \quad P(N^*) = 2\Phi\left(\frac{z\frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\sqrt{1+\delta_x^2}}\right) - 1,$$

$$P\left(NN^{*}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\Delta H/\sigma_T}\left[\Phi\left(\frac{t+z\frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\delta_x}\right)-\Phi\left(\frac{t-z\frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\delta_x}\right)\right]e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (14)$$

Используя формулы (4) и (14) для множества корней $z_1\left(\delta_x\right)$ можно определить соответствующие им значения вероятностей ошибочных решений. Это позволяет сопоставить выбранным в зависимости от δ_x оптимальным порогам H_1^* и H_2^* вероятности ошибочных решений при контроле качества с использованием оптимальных порогов. Эти зависимости представлены на рис.5.



б)

Рисунок 5 - Влияние дисперсии оценки на вероятности пропуска брака и перебраковки при оптимальном выборе порогов
а) за критерием минимума вероятности принятия ошибочных решений;
б) за критерием минимума условной стоимости ошибочных решений.

Выводы

Рассмотрена задача оптимального выбора порогов сравнения за критериями минимума вероятности принятия ошибочных решений и минимума условной стоимости ошибочных решений при контроле объектов со случайными параметрами.

Получены зависимости, позволяющие для случая нормальных распределений параметров и их оценок находить оптимальные значения порогов контроля качества при известной вероятности

 ISSN 1562-9945

производственного брака.

Значения оптимальных порогов контроля при их выборе за критерием минимума вероятности принятия ошибочных решений определяются дисперсией оценки параметра и практически не зависит от вероятности производственного брака.

Для двух рассмотренных критериев получены зависимости вероятности принятия ошибочных решений (перебраковки и пропуска брака) от величины порогов. Из анализа этих зависимостей следует, что при контроле качества объектов со случайными параметрами новые пороги контроля следует выбирать за критерием минимума вероятности принятия ошибочных решений, если для контролируемых объектов критической является пребраковка и за критерием минимума ожидаемой стоимости принятия ошибочных решений - для объектов ответственного назначения, для которых критическим является пропуск бракованных изделий. Платой за такие решения является увеличение приблизительно в 6 раз по сравнению с критерием минимума вероятности принятия ошибочных решений вероятности перебраковки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малайчук, В.П. Математическая дефектоскопия: Монография / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой.-Д.:Системные технологии, 2005. - 180 с.
2. Кошулян, А.В. Контроль объектов со случайными параметрами/ А.В. Кошулян, В.П. Малайчук, Н.А. Лысенко,. -Д.: Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 3 (68). - Днепропетровск, 2010.
3. И.Н. Бронштейн. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов./ И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - М.: Наука, 1964.

Получено 27.01.2010г.