УДК 65.01:65.012

И.И. Коваленко, А.В. Швед

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУППОВЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК С ПРИМЕНЕНИЕМ АДАПТИВНЫХ РОБАСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

Аннотация. Рассмотрена задача выделения из исходной неоднородной совокупности оценок экспертов её однородной составляющей на основе адаптивных робастных процедур статистического оценивания. Предложенный подход позволяет проводить более детальный анализ групповых экспертных оценок, формируемых в рамках абсолютной шкалы измерений. Что в свою очередь повышает эффективность принятия решений по их согласованности или несогласованности.

Введение. Анализ групповых экспертных оценок направлен, прежде всего, на определение степени их согласованности, по результатам которой формируются коллективные решения. Одним из признаков согласованности экспертных оценок может быть наличие унимодальности и симметричности функции плотности распределения вероятностей, построенной по числовым значениям таких оценок, когда эксперты работают в абсолютной шкале измерений.

Однако, достаточно часто, в составе группы экспертов присутствуют такие, чьи оценки по величине могут отличаться от оценок основной группы. Такие оценки в прикладной статистике квалифицируются как «резко выделяющиеся», «сомнительные», «подозрительные» и др. [1]. Их присутствие в общей совокупности групповых экспертных оценок нарушает её однородность. Поэтому возникает задача выделения из исходной неоднородной совокупности оценок её однородной составляющей, для последующего статистического оценивания. Для решения такой задачи, например, широко используется метод максимального правдоподобия, однако он основан на информации о законе распределения данных, что в свою очередь, требует наличия достаточно большого объема выборок значений ($n \geq 100$). Учитывая то, что число экспертов, принимающих участие в экспертизе, как правило, составляет $m \leq 30$ [2-4], то соответствующая совокупность их оценок не всегда позволяет гарантированно получить функцию распределения со строгим законом распределения.

В такой ситуации для решения указанной задачи целесообразно использовать адаптивные робастные процедуры статистического оценивания.

Постановка задачи. Пусть группа экспертов сформировала некоторую совокупность оценок $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$, которая может состоять из ряда подсовокупностей $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$, ..., $X_k \subseteq X$ оценок, принадлежащих различным подгруппам экспертов. Требуется определить такое пороговое решающее правило, которое позволит разделить исходную совокупность X на ряд подмножеств вида:

$$x_i \in \begin{cases} X_1, \text{если } x_i \geq p_1; \\ X_2, \text{если } x_i \geq p_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_k, \text{если } x_i \geq p_k. \end{cases} \quad (1)$$

где p1, p2, ..., pk – значение порогов равные определенным значениям xi.

Изложение основного материала. Для решения поставленной задачи воспользуемся двумя адаптивными робастными статистическими процедурами, основанными на расчете эксцесса и асимметрии [5-7]:

$$T_1 = \begin{cases} T^c(0,25), & k < 2,0; \\ T(0), & 2,0 \leq k \leq 4,0; \\ T(0,25), & 4,0 < k \leq 5,5; \\ T(0,5), & 5,5 < k. \end{cases} \quad (2)$$

$$T_2 = \begin{cases} T^c(0,25), & Q < 2,0; \\ T(0), & 2,0 \leq Q \leq 2,6; \\ T(0,1875), & 2,6 < Q \leq 3,2; \\ T(0,375), & Q > 3,2. \end{cases} \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) использованы следующие обозначения: k – выборочный эксцесс; Tc(α) – среднее, построенное по [α·n] старшим и [α·n] младшим значениям вариационного ряда, вида [6,8]:

$$T^c(\alpha) = \left(\frac{1}{2\alpha n}\right)\left\{\sum_{i=1}^{[\alpha n]}(x_{(i)} + x_{(n-i+1)}) + (\alpha n - [\alpha n])(x_{([\alpha n]+1)} + x_{(n-[\alpha n])})\right\}; (4)$$

n – объем вариационного ряда вида x(1) ≤ x(2) ≤ ... ≤ x(i) ≤ ... ≤ x(n),

 ISSN 1562-9945

построенного по значениям совокупности X; α (0≤ α ≤0,5) − константа усечения. $T(0) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ − выборочное среднее. T(α) − усеченное среднее с уровнем усечения g=1+[α·n], r=g−[α·n], вида [6,8,9]:

$$T(\alpha) = \frac{1}{\{n(1-2\alpha)\}}\left(rx_{(g)} + \sum_{i=g+1}^{n-g} x_{(i)} + rx_{(n-g+1)}\right), \qquad (5)$$

где [α·n] − наибольшее целое, не превосходящее α·n и α1=0,1875, α2=0,25, α3=0,375. T(α=0,5)=med − выборочная медиана:

$$med = \begin{cases} x_{((n+1)/2)}, & \text{если } n - \text{нечетное}, \\ (x_{(n/2)} + x_{(1+n/2)})/2, & \text{если } n - \text{четное}. \end{cases} \qquad (6)$$

$Q = \frac{U_{(0,05)} - L_{(0,05)}}{U_{(0,5)} - L_{(0,5)}}$ − статистика, характеризующая асимметрию распределения [5,7,10-14]. Здесь U(α) − среднее значение [α·n], (α1=0,05 и α2=0,5) старших членов вариационного ряда; L(α) − среднее [α·n], (α1=0,05 и α2=0,5) младших членов вариационного ряда.

Основная идея рассмотренных процедур (2) и (3) заключается в том, что в зависимости от значений k и Q выбирается и подсчитывается одна из перечисленных оценок типа «среднее».

Принцип усечения значений вариационного ряда, заложенный в построение рассмотренных оценок, может быть использован в решающих правилах разбиения исходной совокупности экспертных оценок X.

Рассмотрим теперь процесс разбиения значений вариационного ряда x(i), i=1,n на подсовокупности. По полученным величинам k и Q назначаются уровни усечения α, что позволяет представить исходный вариационный ряд в таком виде:

$$X_{(i)} = \begin{cases} (x_{(1)}, x_{(\alpha_1 n)}), (x_{([\alpha_1 n]+1)}, x_{(3\alpha_1 n)}), \\ (x_{([3\alpha_1 n]+1)}, x_{(n)}), \ k < 2, \\ (x_{(1)}, x_{(n)}), \ 2 \le k \le 4, \\ (x_{(1)}, x_{(\alpha_1 n)}), (x_{([\alpha_1 n]+1)}, x_{(3\alpha_1 n)}), \\ (x_{([3\alpha_1 n]+1)}, x_{(n)}), \ 4 \le k \le 5,5, \\ (x_{(1)}, x_{(\alpha_2 n)}), (x_{([\alpha_2 n]+1)}), \ k > 5,5. \end{cases} \qquad (7)$$

$$X_{(i)}=\begin{cases}(x_{(1)},x_{(\alpha_3 n)}),(x_{([\alpha_3 n]+1)},x_{(3\alpha_3 n)}),\\ (x_{([3\alpha_3 n]+1)},x_{(n)}),\ Q<2,\\ (x_{(1)},x_{(n)}),\ 2\le Q\le 2,6,\\ (x_{(1)},x_{(\alpha_3 n)}),(x_{([\alpha_3 n]+1)},x_{(n-[3\alpha n])}),\\ (x_{(n-[\alpha_3 n]+1)},x_{(n)}),\ 2,6<Q\le 3,2,\\ (x_{(1)},x_{(\alpha_4 n)}),(x_{([\alpha_4 n]+1)},x_{(n-[\alpha_4 n])}),\\ (x_{(n-[\alpha_4 n]+1)},x_{(n)}),\ Q>3,2.\end{cases} \tag{8}$$

Используя разные сочетания величин k и Q для значений α, можно получить более детальное разбиение вариационного ряда.

Рассмотрим последовательно такие процедуры:

При $2,0\le k\le 4,0$ и $2,0\le Q\le 2,6$ имеем

$$[x_{(1)},x_{(n)}]\in X_0. \tag{9}$$

Это означает, что ряд не урезается, его значения однородны и степень согласованности экспертных оценок высокая.

При $k<2,0$ и $2,6<Q\le 3,2$ имеем $X=\{X_1,X_0,X_2\}$, $X_1^{'}\subset X_1$, $X_2^{'}\subset X_2$,

$$\begin{gathered}[x_{(1)},x_{(0,25n)}]\in X_1,[x_{(0,25n+1)},x_{(0,75n)}]\in X_0,\\ [x_{(0,75n+1)},x_{(n)}]\in X_2,\\ [x_{(1)},x_{(0,1875n)}]\in X_1^{'},[x_{(0,8125n+1)},x_{(n)}]\in X_2^{'}.\end{gathered} \tag{10}$$

При $k<2,0$ и $Q>3,2$ имеем $X=\{X_1,X_0,X_2\}$, $X_1^{'}\subset X_1$, $X_2^{'}\subset X_2$,

$$\begin{gathered}[x_{(1)},x_{(0,375n)}]\in X_1,\ [x_{(0,375n+1)},x_{(0,625n)}]\in X_0,\\ [x_{(0,625n+1)},x_{(n)}]\in X_2,\\ [x_{(1)},x_{(0,25n)}]\in X_1^{'},\ [x_{(0,75n+1)},x_{(n)}]\in X_2^{'}.\end{gathered} \tag{11}$$

При $k<2,0$ и $Q<2,0$ имеем $X=\{X_1,X_0,X_2\}$,

$$\begin{gathered}[x_{(1)},x_{(0,25n)}]\in X_1,\\ [x_{(0,25n+1)},x_{(0,75n)}]\in X_0,\\ [x_{(0,75n+1)},x_{(n)}]\in X_2.\end{gathered} \tag{12}$$

При $4,0<k\le 5,5$ и $Q<2,0$ имеем $X=\{X_1,X_0,X_2\}$,

$$\begin{gathered}[x_{(1)},x_{(0,25n)}]\in X_1,\\ [x_{(0,25n+1)},x_{(0,75n)}]\in X_0,\\ [x_{(0,75n+1)},x_{(n)}]\in X_2.\end{gathered} \tag{13}$$

 ISSN 1562-9945

При $4,0 < k \le 5,5$ и $2,6 < Q \le 3,2$ имеем $X = \{X_1, X_0, X_2\}$, $X_1^{'} \subset X_1$, $X_2^{'} \subset X_2$,

$$\begin{aligned}
&[x_{(1)}, x_{(0,25\,n)}] \in X_1,\\
&[x_{(0,25\,n+1)}, x_{(0,75\,n)}] \in X_0,\ [x_{(0,75\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2,\\
&[x_{(1)}, x_{(0,1875\,n)}] \in X_1^{'},\ [x_{(0,8125\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2^{'}.
\end{aligned} \tag{14}$$

При $4,0 < k \le 5,5$ и $Q > 3,2$ имеем $X = \{X_1, X_0, X_2\}$, $X_1^{'} \subset X_1$, $X_2^{'} \subset X_2$,

$$\begin{aligned}
&[x_{(1)}, x_{(0,375\,n)}] \in X_1,\ [x_{(0,375\,n+1)}, x_{(0,625\,n)}] \in X_0,\\
&[x_{(0,625\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2,\\
&[x_{(1)}, x_{(0,25\,n)}] \in X_1^{'},\ [x_{(0,75\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2^{'}.
\end{aligned} \tag{15}$$

При $k > 5,5$ и $Q < 2,0$ имеем $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1^{'} \subset X_1$, $X_2^{'} \subset X_2$,

$$\begin{aligned}
&[x_{(1)}, x_{(0,5\,n)}] \in X_1,\ [x_{(0,5\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2,\\
&[x_{(1)}, x_{(0,25\,n)}] \in X_1^{'},\ [x_{(0,75\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2^{'}.
\end{aligned} \tag{16}$$

При $k > 5,5$ и $2,6 < Q \le 3,2$ имеем $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1^{'} \subset X_1$, $X_2^{'} \subset X_2$,

$$\begin{aligned}
&[x_{(1)}, x_{(0,5n)}] \in X_1,\ [x_{(0,5\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2,\\
&[x_{(1)}, x_{(0,1875\,n)}] \in X_1^{'},\ [x_{(0,8125\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2^{'}.
\end{aligned} \tag{17}$$

При $k > 5,5$ и $Q > 3,2$ имеем $X = \{X_1, X_2\}$, $X_1^{'} \subset X_1$, $X_2^{'} \subset X_2$,

$$\begin{aligned}
&[x_{(1)}, x_{(0,5\,n)}] \in X_1,\ [x_{(0,5\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2,\\
&[x_{(1)}, x_{(0,375\,n)}] \in X_1^{'},\ [x_{(0,625\,n+1)}, x_{(n)}] \in X_2^{'}.
\end{aligned} \tag{18}$$

В приведенных выражениях (9) – (18) подмножество X_0 характеризует однородную составляющую вариационного ряда, что доказывает высокую степень согласованности экспертных оценок. Составляющие ряда X_1, X_2, $X_1^{'}$, $X_2^{'}$ характеризуют группы экспертов, оценки которых в некоторой мере отличаются от оценок основной группы экспертов в силу принятого изначального положения про унимодальность функции плотности распределения.

Рассмотрим числовой пример разбиения вариационного ряда, построенного по выборкам значений экспертных оценок, представленных в таблице 1. Для проведения анализа выберем, например, оценки стоящие по главной диагонали таблицы 1, т.е.:

$T^c(\alpha = 0,25)$ при $k < 2,0$ и $Q < 2,0$; $T(\alpha = 0)$ при $2,0 \le k \le 4,0$ и $2,0 \le Q \le 2,6$; $T(\alpha = 0,25)$ при $4,0 < k \le 5,5$ и $2,6 < Q \le 3,2$; $T(\alpha = 0,5)$ при $k > 5,5$ и $Q > 3,2$.

Таблица 1

Попарное представление оценок в зависимости от величин k и Q

	$k < 2,0$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$2,0 \le k \le 4,0$ $T(\alpha = 0)$	$4,0 < k \le 5,5$ $T(\alpha = 0,25)$	$k > 5,5$ $T(\alpha = 0,5)$
$Q < 2,0$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$T^c(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0)$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0,25)$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$T^c(\alpha = 0,25)$ $T(\alpha = 0,5)$
$2,0 \le Q \le 2,6$ $T(\alpha = 0)$	$T(\alpha = 0)$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0)$	$T(\alpha = 0)$ $T(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0)$ $T(\alpha = 0,5)$
$2,6 < Q \le 3,2$ $T(\alpha = 0,1875)$	$T(\alpha = 0,1875)$ $T^c(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0)$ $T(\alpha = 0,1875)$	$T(\alpha = 0,1875)$ $T(\alpha = 0,25)$	$T(\alpha = 0,1875)$ $T(\alpha = 0,5)$
$Q > 3,2$ $T(\alpha = 0,375)$	$T^c(\alpha = 0,25)$ $T(\alpha = 0,375)$	$T(\alpha = 0)$ $T(\alpha = 0,375)$	$T(\alpha = 0,25)$ $T(\alpha = 0,375)$	$T(\alpha = 0,375)$ $T(\alpha = 0,5)$

Процедуры формирования уровней усечения $m=[\alpha \cdot n]$, лежащих в основе разбиения ряда, показаны на рис.1.

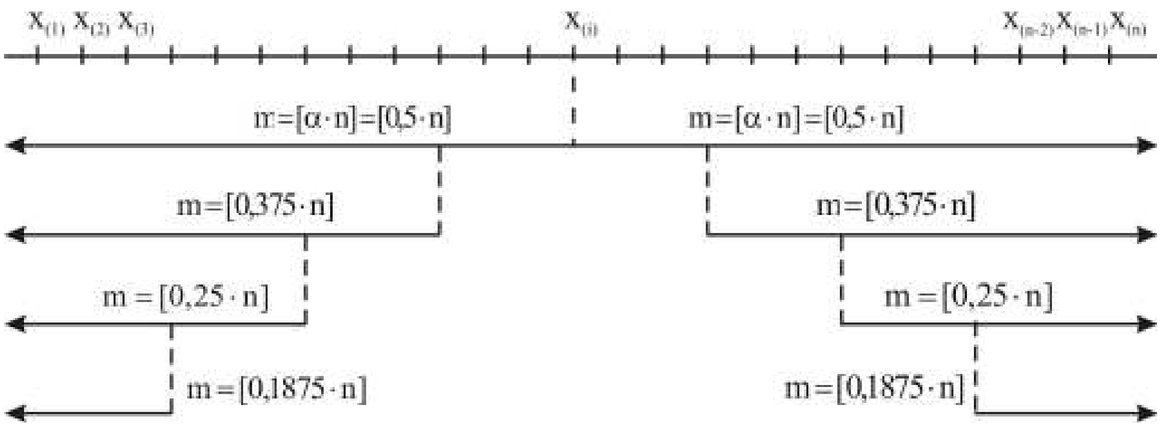

Рисунок 1 – Графическое представление процедур формирования уровней усечения вариационного ряда

Виды исследуемых выборок экспертных оценок, состоящие из однородной выборки; выборки с «сомнительными» значениями; выборки с «резко выделяющимися» значениями и комбинированной выборки, включающей в себя как «сомнительные», так и «резко выделяющиеся» значения, даны в таблице 2.

 ISSN 1562-9945

Таблица 2

Виды исследуемых выборок экспертных оценок

	I	II	III	IV		I	II	III	IV		I	II	III	IV
1	2	2	2	2	11	6	16	6	12	21	4	4	4	4
2	2	2	2	2	12	6	6	6	6	22	4	4	4	4
3	4	4	4	4	13	7	14	72	21	23	5	16	5	5
4	3	3	3	3	14	7	17	7	17	24	5	13	96	96
5	3	3	3	3	15	5	5	5	5	25	7	7	7	7
6	5	15	5	15	16	5	5	5	5					
7	8	8	8	8	17	4	4	4	4					
8	8	16	56	56	18	2	2	2	2					
9	8	8	8	8	19	4	4	4	4					
10	6	6	6	6	20	3	3	3	3					

I – однородная выборка значений экспертных оценок;

II – выборка экспертных оценок с «сомнительными» значениями;

III – выборка экспертных оценок с «резко выделяющимися» значениями;

IV – комбинированная выборка значений экспертных оценок.

Рассмотрим схему разбиения вариационного ряда, построенного по числовой выборке экспертных оценок содержащей «сомнительные» значения (таблица 2).

Определим выборочный эксцесс k:

$$k = n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2 = 25 \cdot \frac{34688,19}{443875,74} = 1,95.$$

Из выражения (2) выбирается оценка T(0,25) с константой усечения $\alpha = 0,25$.

Определим средние $m=[\alpha \cdot n]$, ($\alpha 1=0,05$ и $\alpha 2=0,5$) младших членов вариационного ряда, при m=1 и m=12 соответственно:

$$L(0,05) = 2_{(1)} = 2;$$

$$L(0,5) = \frac{2_{(1)} + 2_{(2)} + 2_{(3)} + 3_{(4)} + 3_{(5)} + 3_{(6)} + 4_{(7)} + 4_{(8)} + 4_{(9)} + 4_{(10)}}{12} +$$

$$+ \frac{4_{(11)} + 5_{(12)}}{12} = 3,33.$$

Определим средние $m=[\alpha \cdot n]$, ($\alpha 1=0,05$ и $\alpha 2=0,5$) старших членов вариационного ряда, при m=1 и m=12 соответственно:

$$U(0,05)=17_{(25)}=17;$$

$$U(0,5)=\frac{6_{(14)}+6_{(15)}+7_{(16)}+8_{(17)}+8_{(18)}+13_{(19)}+14_{(20)}+15_{(21)}+16_{(22)}+16_{(23)}}{12}+$$

$$+\frac{16_{(24)}+17_{(25)}}{12}=11,83.$$

Определим стабильный аналог коэффициента асимметрии:

$$Q=\frac{U(0,05)-L(0,05)}{U(0,5)-L(0,5)}=\frac{17-2}{11,83-3,33}=1,76.$$

Из выражения (3) выбирается оценка T(0,25) с константой усечения α = 0,25.

Используя выражение (12), выделим из исходной неоднородной совокупности оценок, которая представляет собой выборку экспертных оценок с «сомнительными» значениями, её однородную составляющую:

$$[x_{(1)},x_{(6)}]\in X_1,$$

$$[x_{(7)},x_{(18)}]\in X_0,$$

$$[x_{(19)},x_{(25)}]\in X_2.$$

Таким образом, значения вариационного ряда попадающие в подмножество X_0 можно считать однородными, что свидетельствует о наличии высокой степени согласованности экспертных оценок в этой подсовокупности ($X_0 \subseteq X$). Составляющие ряда X_1 и X_2 ($X_1 \subseteq X, X_2 \subseteq X$) характеризуют группы экспертов, оценки которых в некоторой мере отличаются от оценок основной группы.

Выводы. Рассмотренный подход позволяет проводить более детальный анализ групповых экспертных оценок, формируемых в рамках абсолютной шкалы измерений, что в свою очередь повышает эффективность принятия решений по их согласованности или несогласованности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979. – 296 с.
2. Орлов А.И. Экспертные оценки. Учебное пособие. - М.: 2002. – 31 с.

 ISSN 1562-9945

3. Орлов А.И. Экспертные оценки // Заводская лаборатория, 1996, Т. 62, № 1, с. 54-60.
4. Горский В.Г., Орлов А.И., Гриценко А.А. Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2000, № 3, с. 159-167.
5. Hogg R.V. Some observations on robust estimation // Journal of the American Statistical Association, 1967, vol. 62, pp. 1179–1186.
6. Reed III J.F., Stark D.B. Robustness estimators of locations: a classification of linear and adaptive estimators // Journal of Applied Statistics, 1994, vol. 21, № 3, pp. 95–124.
7. Hogg R.V. Adaptive robust procedures: a partial review and some suggestions for future applications and theory // Journal of the American Statistical Association, 1974, vol. 69, pp. 909–923.
8. Balakrishnan N. Parameters, order statistics, outliers and robustness // Revista Matematica Complutence, 2007, vol. 20, № 1, 107 p.
9. Ramsey P.H., Ramsey P.P. Optimal trimming and outlier elimination // Journal of Modern Applied Statistical Methods, 2007, vol. 6, pp. 355–360.
10. Andrews D.F., Bickel P.J, Hampel P.J., Huber P.J., Rogers W.H. & Tukey J.W Robust Estimates of Locations: Survey and Advances // Princeton, NJ, Princeton University Press, 1972.
11. De Wet T., Van Wyk J.W.J Efficiency and robustness of Hogg's adaptive trimmed means // Communications in Statistics – Theory and methods, 1979, vol. 8, pp. 117–128.
12. Reed III J.F., Stark D.B. Hinge estimators of location: Robust to asymmetry // Computer methods and programs in Biomedicine, 1996, vol. 49, pp. 11–17.
13. Hogg R.V. & Lenth R.V. A review of some adaptive statistical techniques // Communications in Statistics – Theory and methods, 1984, vol. 13, pp. 1551–1579.
14. Hogg R.V., Horn P.S, Lenth R.V. On adaptive estimation // Journal of Statistical Planning and Inference, 1984, pp. 333–343.

Получено 24.01.2010г.