

УДК 669.169

А.И. Балакин, В.Я. Копп, О.Н. Кукушкин, О.В. Филипович  
**ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ  
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УЧАСТКА С ВОЗВРАТОМ  
ПРОДУКЦИИ**

*Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с моделированием автоматизированных технологических систем, реализующих технологические процессы, требующие возврата продукции на повторное обслуживание. Построены полумарковские модели, позволяющие определять функции распределения времени между событиями в выходном потоке продукции, что обеспечивает удобство их стыковки с элементами высших уровней иерархии производства. Для обеих моделей приведены результаты моделирования.*

**Введение**

Вопросы моделирования автоматизированных линий являются весьма актуальными, так как позволяют прогнозировать их производительность.

Анализ литературных источников, например [1], показывает что во многих случаях структура автоматизированных линий включает в себя контролирующие устройства, которые производят контроль и сортировку изделий после определенных операций. Если обнаруживается исправимый брак, то изделие по обратной связи отправляется на определенную ячейку для его исправления. Это позволяет уменьшить количество бракованных изделий на выходе линии.

**Постановка задачи**

Рассмотрим автоматизированный участок, состоящий из двух технологических ячеек, после второй ячейки стоит контрольное устройство, производящее сортировку деталей. После контроля деталь либо поступает на выход участка с вероятностью  $p$ , либо по обратной связи поступает на повторное обслуживание если обнаружен брак с вероятностью  $(1-p)$ . Контрольное устройство будем считать абсолютно надежным. Заявки, поступающие на повторное обслуживание, имеют

приоритет перед заявками основного потока. При моделировании используется итерационный подход.

Рассмотрим автоматизированный участок с обратной связью, структурная схема которого изображена на рисунке 1.

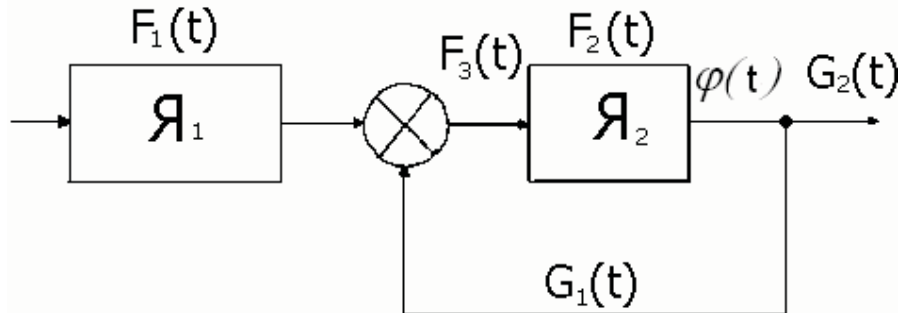


Рисунок 1 – Структурная схема автоматизированного участка с обратной связью

Задача ставится следующим образом: по известным функциям распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  времени обслуживания продукции на  $Я_1$  и  $Я_2$  (случайные величины  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ) необходимо определить функцию распределения  $G_2(t)$  (случайная величина  $\beta_2$ ) между событиями в выходном потоке. Известно, что вероятность брака на выходе второй ячейки равна  $(1-p)$ . Обозначим через  $G_1(t)$  функцию распределения времени (случайная величина  $\beta_1$ ) между событиями в потоке бракованных изделий.

При моделировании указанной системы необходимо учитывать взаимные блокировки ячеек: при отказе любой из них другая прекращает работу.

Фактически задача состоит из нескольких подзадач:

- необходимо определить функцию распределения  $\varphi(t)$ , времени обслуживания продукции двух последовательно соединенных ячеек без обратной связи при известных функциях распределения времени обслуживания  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  каждой из них;

- найти функции распределения  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  времен между событиями в прореженных потоках;

- определить функцию распределения  $F_3(t)$  времени (случайная величина  $\beta_3$ ) между событиями в результирующем потоке

при суперпозиции двух случайных процессов с функциями распределения  $F_1(t)$ ,  $G_1(t)$ .

**Решение первой подзадачи** для  $n$  ячеек предложено в [3]. Ниже приводится выражение для функции  $\bar{\varphi}(\tau)$ , которая, связана с функцией распределения  $\varphi(\tau) = 1 - \bar{\varphi}(\tau)$  соотношением [2]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\tau) = & \sum_{k=1}^n \bar{F}_k(t) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \bar{F}_{k_1}(t) \bar{F}_{k_2}(t) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \bar{F}_{k_1}(t) \bar{F}_{k_2}(t) \bar{F}_{k_3}(t) - \\ & - \dots + (-1)^{n-1} \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) \dots \bar{F}_n(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Из выражения (1) найдем функцию распределения  $\bar{\varphi}(\tau)$  для данной задачи. Она будет иметь вид:

$$\bar{\varphi}(t)_0 = \bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t). \quad (2)$$

Формула (2) справедлива только для нулевой итерации (нижний индекс 0), где обратная связь не учитывается. Для всех последующих итераций эта формула примет следующий вид:

$$\bar{\varphi}(t)_i = \bar{F}_3(t)_{i-1} + \bar{F}_2(t) - \bar{F}_3(t)_{i-1} \bar{F}_2(t), \quad (3)$$

где  $i$  - номер итерации.

**Решение второй подзадачи** связано со следующей последовательностью технологических действий: после контроля деталь уходит на следующую операцию с вероятностью  $p$ , либо по обратной связи поступает на повторное обслуживание с вероятностью  $(1-p)$ . Предполагается, что на технологическую ячейку постоянно поступает поток заявок. Время их обслуживания на данной операции распределено по закону  $F(t) = F_{\theta_k}(t)$ , имеющему плотность  $f(t)$ , а также конечное математическое ожидание и дисперсию.

Рассмотрим граф состояний такой системы, представленный на рисунок 2.

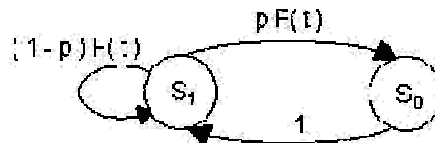


Рисунок 2 – Граф состояний системы, осуществляющей возврат бракованной продукции на повторно обслуживание

Условные обозначения приняты следующие:  $S_0$  – мгновенное состояние соответствует выдаче и загрузке продукции;  $S_1$  – состояние

обслуживания;  $p$  – вероятность того, что изделие на выходе ячейки будет окончательно обслужено.

Задача ставится таким образом: необходимо определить ФР времени между заявками в разреженном потоке, формирующемся на выходе ячейки, охваченной обратной связью.

Вероятности перехода из одного состояния в другое будут соответственно равны:

$$P_{01} = 1; P_{10} = p; P_{11} = 1 - p$$

Полумарковские ядра для соответствующих переходов определяются следующим образом:

$$Q_{01} = 1; Q_{10}(t) = pF(t); Q_{11}(t) = (1 - p)F(t).$$

$$q_{11}(t) = \frac{dQ_{11}(t)}{dt} = (1 - p)f(t)$$

Записав уравнения марковского восстановления для определения функции распределения времени пребывания системы в состоянии  $S_1$  и подставив в него выражение для  $q_{11}(t)$ , получим:

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \int_0^x K_1(x-s)q_{11}(s)ds + pF(x) = \\ &= (1-p) \int_0^x f(x-s)K_1(s)ds + pF(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Интегральное уравнение (4) решалось методом последовательных приближений. Решение имеет вид [4]:

$$K_1(t) = pF(t) + p \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^m F^{*(m)}(t). \quad (5)$$

В соответствии с полученным выражением (5) формулы для определения функций распределения  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$  времен между событиями в прореженных потоках годных и негодных изделий (см. рис.1) имеют вид [2]:

$$G_1(t) = (1-p)\varphi(t) + (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} p^n \varphi^{*(n)}(t); \quad (6)$$

$$G_2(t) = p\varphi(t) + p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n \varphi^{*(n)}(t), \quad (7)$$

где  $\varphi(t)$  – функция распределения времени между событиями в непрореженном потоке;  $p$  – вероятность, с которой заявка остается в прореженном потоке событий;  $^{*}(n)$  – обозначение операции свертки порядка  $n$ .

Для решения третьей подзадачи используем известную формулу для суперпозиции двух случайных процессов восстановления [3]. Таким образом, функция распределения  $F_3(t)$  времени между событиями в суммарном потоке будет иметь вид:

$$F_3(t)_i = 1 - \frac{1}{M\alpha_1 + M\beta_{1,i-1}} \left[ \bar{F}_1(t) \int_0^{\infty} \bar{G}_1(t)_{i-1} dt + \bar{G}_1(t)_{i-1} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(t) dt \right], \quad (8)$$

где  $M\beta_{1,i-1}$ ,  $G_1(t)_{i-1}$  - математическое ожидание и функция распределения случайной величины  $\beta_1$  на  $(i-1)$ -ой итерации.

Организовав итерационную процедуру с использованием формул (2), (3), (6), (7), (8), можем получить функцию распределения  $G_2(t)$  между событиями в выходном потоке.

Итерационная процедура поясняется блок-схемой алгоритма вычислений, представленной на рисунке 3, и выполняется в следующем порядке.

1. На нулевой итерации последовательно выполняются операции:

- с помощью формулы (2) определяется функция распределения  $\varphi(\tau)_0 = 1 - \bar{\varphi}(\tau)_0$ ;

- по формулам (6), (7) определяются функции распределения  $G_1(t)_0$  и  $G_2(t)_0$ ;

- определяются  $M\beta_{1,0}$  и  $M\beta_{2,0}$  по формулам  $M\beta_{1,0} = \int_0^{\infty} \bar{G}_1(t)_0 dt$ ,

$$M\beta_{2,0} = \int_0^{\infty} \bar{G}_2(t)_0 dt;$$

- по формуле (8) определяется функция распределения  $F_3(t)_0$ .

2. На первой и последующих итерациях последовательно выполняются операции:

- с помощью формулы (3) определяется функция распределения  $\varphi(\tau)_i = 1 - \bar{\varphi}(\tau)_i$ ;

- по формулам (6), (7) определяются функции распределения  $G_1(t)_i$  и  $G_2(t)_i$ ;

- определяются  $M\beta_{1,i}$  и  $M\beta_{2,i}$  по формулам  $M\beta_{1,i} = \int_0^{\infty} \bar{G}_1(t)_i dt$ ,

$$M\beta_{2,i} = \int_0^{\infty} \bar{G}_2(t)_i dt;$$

- по формуле (8) определяется функция распределения  $F_3(t)_i$ .

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие:

$$|M\beta_{2,i} - M\beta_{2,i-1}| \leq \delta,$$

где  $\delta$  - заданная величина, определяемая требуемой точностью вычислений.

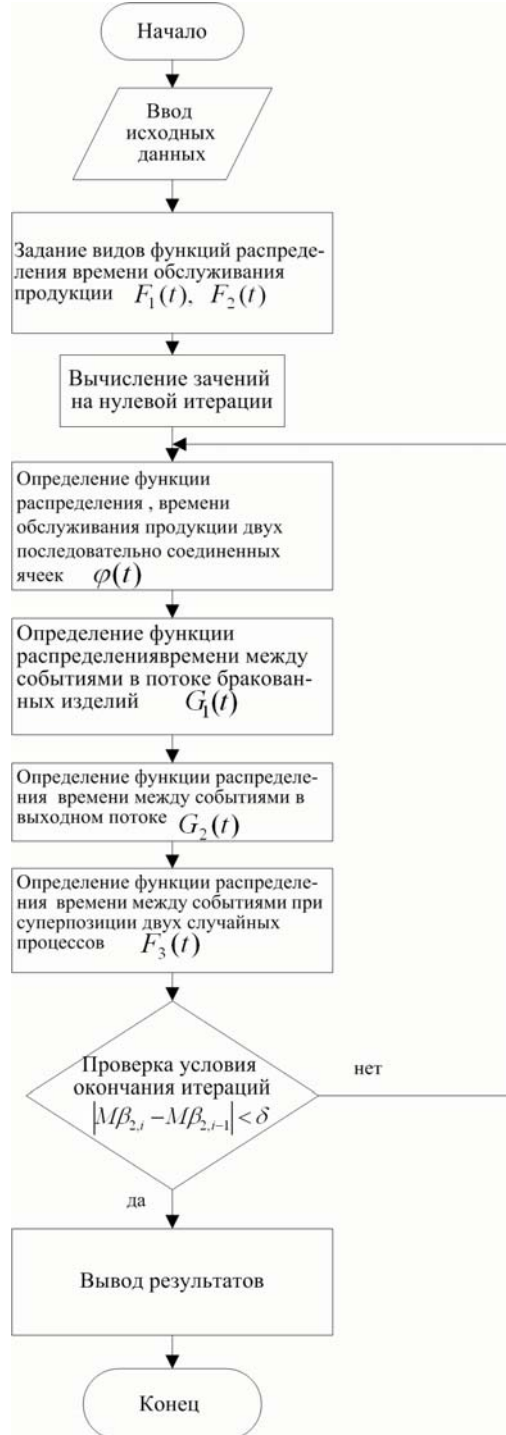


Рисунок 3 - Блок-схема алгоритма реализации итерационной процедуры

На рисунке 4 приведены два примера моделирования с различными исходными данными.

**Пример 1.** При моделировании в качестве, функции распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  были взяты функции распределения Эрланга второго порядка, с одинаковым математическим ожиданием равным 0,0667 ч, вероятность того что изделие после обработки годное  $p=0,8$ .

Результаты моделирования следующие: математические ожидания  $M\beta_2$  и  $M\beta_3$  времен между событиями в прореженном и в суммарном потоках соответственно равны 0,11416 ч и 0,0639 ч. Вид функций распределения времени обслуживания продукции на двух последовательно соединенных ячейках  $\varphi(t)_0$ , не охваченных обратной связью и функции  $G_2(t)$  и представлен на рисунке 4а.

**Пример 2.** При моделировании в качестве, функции распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  также были взяты функции распределения Эрланга второго порядка с математическими ожиданиями равными соответственно 0,2 ч и 0,0833 ч, вероятность того что изделие после обработки годное  $p=0,6$ .

Результаты моделирования следующие: математические ожидания  $M\beta_2$  и  $M\beta_3$  времен между событиями в прореженном и в суммарном потоках соответственно равны 0,333 ч и 0,144 ч. Вид функций распределения времени обслуживания продукции на двух последовательно соединенных ячейках  $\varphi(t)_0$ , не охваченных обратной связью и функции  $G_2(t)$  и представлен на рисунке 4б.

Возможно более простое решение рассмотренной задачи, предлагается на основании формулы (5) заменить вторую ячейку, охваченную обратной связью эквивалентным элементом, для которого известна функция распределения времени обслуживания продукции  $K_1(t)$ . Тогда функция распределения времени  $G_2(t)$  между событиями в выходном потоке имеют вид

$$\overline{G_2(t)} = \overline{F_1(t)} + \overline{K_1(t)} - \overline{F_1(t)}\overline{K_1(t)}.$$

Такой приближенный подход крайне удобен при усложнении рассматриваемой задачи. Так, например если времена повторного обслуживания отличаются друг от друга. В этом случае для эквивалентной замены используется следующая модель ячейки

охваченной обратной связью.

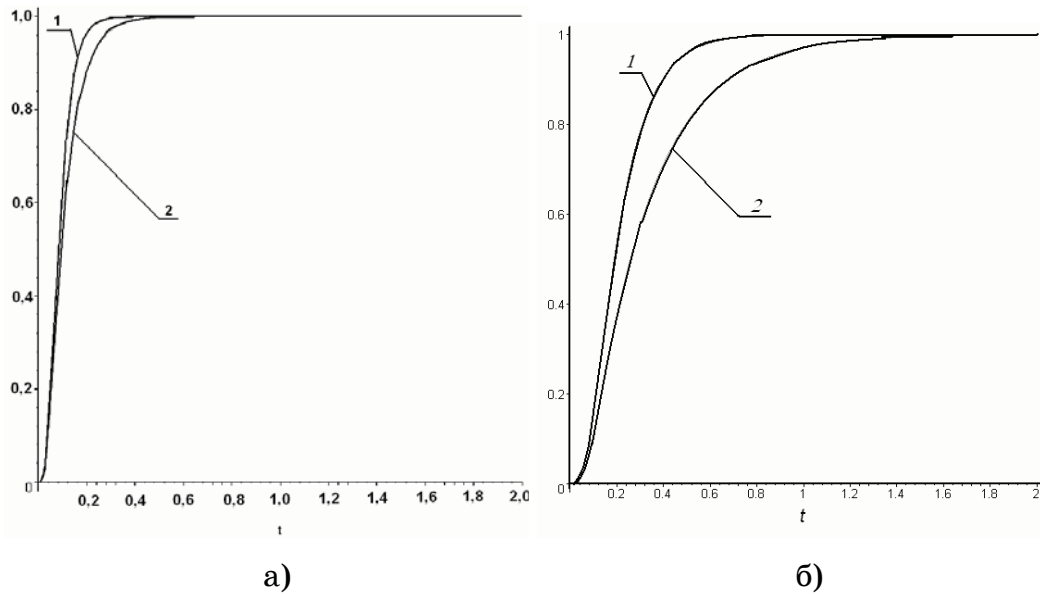


Рисунок 4 – Вид функции распределения времени

а) пример 1; б) пример 2; 1 - обслуживания продукции на двух последовательно соединенных ячейках  $\varphi(t)_0$ , не охваченных обратной связью; 2 – между событиями в прореженном выходном потоке  $G_2(t)$

Таким образом, рассматривается задача: если в изделии обнаруживается брак, то оно возвращается по обратной связи на ту же операцию, но время повторного обслуживания при этом изменяется. В общем случае все эти времена различны, случайны и описываются следующими функциями распределения:  $F_0(t)$  - функция распределения времени на нулевом обслуживании;  $F_1(t)$  - функция распределения времени на первом обслуживании;  $F_n(t)$  - функция распределения времени на n-ном обслуживании.

Граф состояний такой системы представлен на рисунке 5.

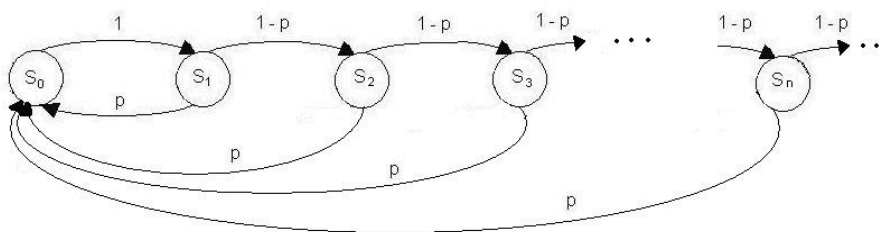


Рисунок 5 – Граф состояний с изменяющимся временем при повторных обслуживаниях



Задачу будем решать, используя формулу полной вероятности.

Для этого примем следующие гипотезы:

$H_0$  - выполняется нулевое обслуживание;

$H_1$  - выполняется первое обслуживание;

$H_n$  - Выполняется n-е обслуживание.

Вероятности этих гипотез равны

$$\begin{cases} P(H_0) = p \\ P(H_1) = p(1-p) \\ P(H_2) = p(1-p)^2 \\ \dots\dots\dots \\ P(H_n) = p(1-p)^n \end{cases} \quad (9)$$

Введем событие А, под которым будем понимать обслуживание продукции на ячейке. Условные вероятности события А при выполнении гипотез  $H_0, H_1, \dots, H_n$  равны

$$\begin{cases} P(A/H_0) = p\{t_0 < t\} = F_0(t) \\ P(A/H_1) = p\{t_0 + t_1 < t\} = F(t_0 + t_1) = F_{0,1}^{(*)}(t) \\ P(A/H_2) = p\{t_0 + t_1 + t_2 < t\} = F(t_0 + t_1 + t_2) = F_{0,\dots,2}^{(*)2}(t) \\ \dots\dots\dots \\ P(A/H_n) = p\left\{\sum_{i=0}^n t_i < t\right\} = F\left(\sum_{i=0}^n t_i\right) = F_{0,\dots,n}^{(*)n}(t) \end{cases} \quad (10)$$

Функция распределения времени между заявками в прореженном потоке событий определяется по формуле полной вероятности:

$$K_1(t) = P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H_n)P(A/H_n) \quad (11)$$

Подставляя (9), (10) в (11) имеем:

$$K_1(t) = pF_0(t) + p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n F_{1,\dots,n}^{(*)n}(t) \quad (12)$$

В принципе выражение (12) можно получить итерированием системы интегральных уравнений, по аналогии с тем, как это было сделано в [4] для уравнения (4). Как и ранее на основе выражения (12) определяются функции распределения  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$ .

На рисунке 6 приведен пример моделирования данной системы.

При моделировании: в качестве функций распределения  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  были взяты законы распределения Эрланга второго порядка, с одинаковым математическим ожиданием равным 0,0667 ч.; вероятность того что изделие после обработки годное  $p=0,8$ ; математическое ожидание времени для каждого последующего повторного обслуживания бралось на 7,5% меньше предыдущего.

Результаты моделирования следующие: математические ожидания  $M\beta_2$  и  $M\beta_3$  времен между событиями в прореженном и в суммарном потоках соответственно равны 0,10336 ч и 0,0818 ч. Вид функции распределения времени  $G_2(t)$ , определяемой по формуле (12), представлен на рисунке 6.

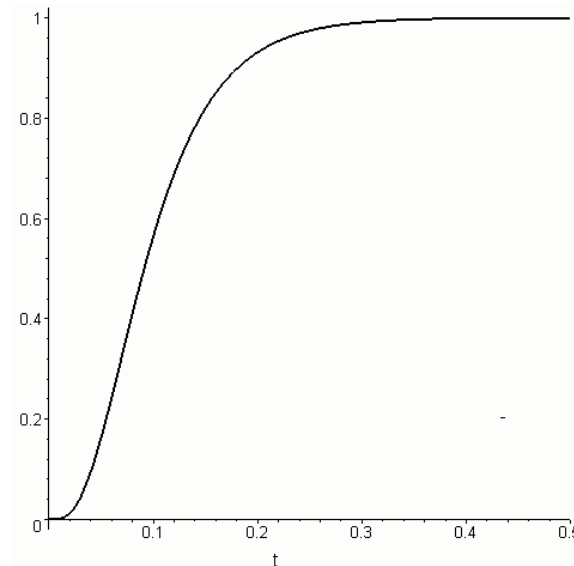


Рисунок 6 - Вид функции распределения времени между событиями в прореженном выходном потоке  $G_2(t)$

Выражение (12) позволяет прогнозировать производительность автоматизированных участков и линий подобного типа. С помощью данных моделей определяется функция распределения времени обслуживания продукции рассматриваемой двухфазной синхронной системой с обратной связью, что позволяет стыковать ее с моделями более высокого уровня.

Введение обратной связи позволяет за счет устранения брака повысить производительность, например в последнем случае, на 9,89%.

В дальнейшем предполагается на основании данных моделей

построить полумарковскую модель синхронной автоматизированной линии с возвратом продукции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меткин Н.П. Технологическая подготовка гибких автоматизированных сборочно-монтажных производств в машиностроении /Н. П. Меткин, М. С. Лапин, В. И. Гольц – Л.: Машиностроение, 1986 – 192 с.
2. Копп В.Я. Итерационный подход при построении полумарковской модели асинхронных автоматизированных линий/ В.Я. Копп // Весн. СевГТУ: Сб. науч. тр. – Севастополь. – 2000 Вып. 27. – С. 73 – 80.
3. Копп В.Я. Анализ суперпозиции случайных процессов при описании функционирования различных структур ГПС / В.Я. Копп, О.П. Чуб, Ю.Е. Обжерин и др.// Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. – Севастополь, 1999. – Вып. 1.1. – С. 87 – 91.
4. Копп В.Я. Моделирование систем контроля с обратными связями /В.Я. Копп, А.И. Балакин, А.А. Скидан, К.П. Аникевич //СИЯЭП Сб.научн.тр. – Севастополь, 2006. – Вып.3 (19). – С. 252 – 257.

Получено 26.09.2009г.