УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

ЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Получены конструктивные процедуры решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений, основанные на приведении матриц к треугольным формам, которое может осуществляться с помощью систем компьютерной алгебры Maple, Reduce, Singular, Gap и т.д.
Ключевые слова: линейные нестационарные дифференциальные матричные операторные уравнения, приведение матрицы к треугольной форме, Maple, Reduce, Singular, Gap.

Актуальность темы. Широкий класс объектов и систем управления адекватно представляются в виде системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части. Математическая теория линейных нестационарных многосвязных систем автоматического регулирования основывается либо на использовании методов пространства состояний [1], либо на применении теории матриц над некоммутативным кольцом линейных нестационарных дифференциальных операторов [2]. В рамках операторного подхода анализ и синтез линейных нестационарные систем осуществляется путём решения линейных матричных операторных уравнений.

Анализ последних исследований. Теоретическим основанием работы является линейная алгебра над некоммутативными кольцами [3].

Постановка задачи. Цель работы состоит в получении конструктивных процедур решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений.

Обоснование полученных результатов. Рассмотрим кольцо R линейных нестационарных дифференциальных операторов с коэффициентами из произвольного поля функций Q, замкнутого относительно дифференцирования. Операторы действуют в пространстве сигналов, состоящем из бесконечнодифференцируемых, за исключением конечного числа точек, функций [4].

Рассмотрим матрицы $A_l \in R^{n\times n}$, $B_l \in R^{n\times m}$ ($A_r \in R^{m\times m}$, $B_r \in R^{n\times m}$). Следуя [5], приведём с помощью элементарных столбцовых (строчных) операцийматрицу $E = |A_l\ B_l|$ ($E = \begin{vmatrix} A_r \\ B_r \end{vmatrix}$) к нижней левой (верхней правой) ступенчатой матрице. Используя следствие из [5], имеем

$$EU = |\ C_l\ 0^{n\times m}\ |\ (UE = \begin{vmatrix} C_r \\ 0^{nxm} \end{vmatrix}), \qquad (1)$$

где $U, U^{-1} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$, $C_l \in R^{n\times n}$ ($C_r \in R^{m\times m}$).

Согласно работе [6], матрица C_l (C_r) в (1) является левым (правым) наибольшим общим делителем ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r). Обозначим

$$U^{-1} = \begin{vmatrix} A_l^{\alpha} & B_l^{\alpha} \\ W & V \end{vmatrix}, \qquad (U^{-1} = \begin{vmatrix} A_r^{\alpha} & W \\ B_r^{\alpha} & V \end{vmatrix}), \qquad (2)$$

$$U = \begin{vmatrix} Z & -B_r^{\beta} \\ Y & A_r^{\beta} \end{vmatrix}, \qquad (U = \begin{vmatrix} Z & Y \\ -B_l^{\beta} & A_l^{\beta} \end{vmatrix}), \qquad (3)$$

$A_l^{\alpha} \in R^{n\times n}$, $B_l^{\alpha} \in R^{n\times m}$, $W \in R^{m\times n}$, $V \in R^{m\times m}$,

$Z \in R^{n\times n}$, $B_r^{\beta} \in R^{n\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$, $A_r^{\beta} \in R^{m\times m}$.

($A_r^{\alpha} \in R^{m\times m}$, $W \in R^{m\times n}$, $B_r^{\alpha} \in R^{n\times m}$, $V \in R^{n\times n}$,

$Z \in R^{m\times m}$, $Y \in R^{m\times n}$, $B_l^{\beta} \in R^{n\times m}$, $A_l^{\beta} \in R^{n\times n}$).

Умножая (1) справа (слева) на матрицу U^{-1}, получим

$$A_l = C_l A_l^{\alpha},\ B_l = C_l B_l^{\alpha} \qquad (4)$$

$$(A_r = A_r^{\alpha} C_r,\ B_l = B_r^{\alpha} C_r)$$

Рассмотрим однородное матричное уравнение

$$A_l z + B_l y = 0^{n\times k} \qquad (zA_r + yB_r = 0^{k\times m}) \qquad (5)$$

относительно неизвестных матриц $z \in R^{n\times k}$, $y \in R^{m\times k}$ ($z \in R^{k\times m}$, $y \in R^{k\times n}$).

Из соотношения (1) с учётом обозначений (3), получаем частное решение уравнения (5) при k=m (k=n)

$$z = -B_r^{\beta},\ y = A_r^{\beta} \quad (z = -B_l^{\beta},\ y = A_l^{\beta}) \qquad (6)$$

Из обозначений (2) и (3) и соотношения $U^{-1}U = I_{n+m}$ ($UU^{-1} = I_{n+m}$), следует, что $-WB_r^{\beta}+VA_r^{\beta} = I_m$ ($-B_l^{\beta}W+A_l^{\beta}V = I_n$). Согласно работе [6], это означает, что матрицы B_r^β и A_r^β (B_l^β и A_l^β) взаимно просты справа (слева).

Для любой матрицы T из $R^{m\times k}$ ($R^{k\times n}$) матрицы

$$z = B_r^\beta T,\ y = A_r^\beta T \qquad (z = T B_l^\beta,\ y = T\ A_l^\beta) \tag{7}$$

являются решением уравнения (5) для любого натурального числа k.

Предложение 1. Если в уравнении (5) матрица A_l (A_r) имеет полный ранг, то его общее решение имеет вид (7).

Доказательство. Пусть z и y – произвольное решение уравнения (5). Учитывая (1) и (2), совершим ряд преобразований

$$0^{n\times k} = |A_l\ B_l| \begin{vmatrix} z \\ y \end{vmatrix} = |A_l\ B_l|\ U\ U^{-1} \begin{vmatrix} z \\ y \end{vmatrix} = |\ C_l\ 0^{n\times m}\ | \begin{vmatrix} K \\ * \end{vmatrix}$$

или

$$C_l K = 0^{n\times k}, \tag{8}$$

где

$$K = A_l^\alpha z + B_l^\alpha y,\ K \in R^{n\times k}. \tag{9}$$

Согласно (4) $A_l = C_l A_l^\alpha$. Так как по условию матрица A_l имеет полный ранг, то, согласно лемме из [5], матрица C_l также имеет полный ранг. Тогда в уравнении (8) $K= 0^{n\times k}$. Обозначая T=Wz-Vy и учитывая (9), запишем

$$\begin{vmatrix} A_l^\alpha & B_l^\alpha \\ W & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ T \end{vmatrix}, \tag{10}$$

где W и V определены в (2). Умножим (10) слева на U. С учётом принятых в (2) и (3) обозначений, получим соотношение (7).

Предложение 2. Если в уравнении (5) матрица A_l (A_r) имеет полный ранг, то и в соотношении (6) матрица A_r^β (A_l^β) имеет полный ранг.

Доказательство. В силу обозначений (2), (3) и соотношения $U^{-1}U=I_{n+m}$, имеем

$$\begin{vmatrix} A_l^\alpha & B_l^\alpha \\ W & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -B_r^\beta \\ A_r^\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^{nxm} \\ I_m \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Так как первый сомножитель в (11) обратим, ранг второго сомножителя равен m.

$$\mathrm{Rk} \begin{vmatrix} -B_r^\beta \\ A_r^\beta \end{vmatrix} = m. \tag{12}$$

Пусть матрица A_r^β имеет неполный ранг. Тогда уравнение A_r^β x=0^m имеет нетривиальное решение x$\in$ R^m. Тогда

$$\begin{vmatrix} -B_r^\beta \\ A_r^\beta \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a \\ 0^m \end{vmatrix} \qquad (13)$$

для некоторого a$\in$ R^n. В силу (12), имеем, что a не равно 0^n. Умножая (13) слева на U^{-1} и учитывая обозначения (2) и (3) получим A_l^α a=0^n , что означает неполноту ранга матрицы A_l^α. Из соотношения (4) A_l = $C_l A_l^\alpha$. По условию матрица A_l имеет полный ранг. Согласно лемме из [5], матрица A_l^α также имеет полный ранг. Противоречие.

Доказательство для матрицы A_r и A_l^β проводится аналогично.

Предложение 3. ЛНОД (ПНОД) матриц A_l и B_l (A_r и B_r), где ранг rk A_l равен n (rk A_r =m), определён с точностью до умножения справа (слева) на обратимую над R матрицу.

Доказательство. Пусть

$$A_L = C_i A_i, \quad B_L = C_i B_i, \qquad (14)$$

где $C_i\in$ R^{nxn} - ЛНОД матриц A_L и B_L, i=1,2. Согласно предложению 1, уравнение (5) имеет решение $A_L(-B_r^\beta) + B_L A_r^\beta = 0^{n\times m}$. Из предложения 2 следует, что rk A_r^β= m. Так как rk A_l = n, то согласно лемме из [5], получим, что rk C_i= n и из (14) имеем

$$A_i B_r^\beta = B_i A_r^\beta. \qquad (15)$$

Рассмотрим второе уравнение в (5), полагая A_r = A_r^β и B_r = B_r^β. Так как rk A_r = m, то согласно предложению 1, в (15) найдутся такие матрицы T_i, что $A_i = T_i B_l^\beta$, $B_i = T_i A_l^\beta$, i=1,2. Поскольку матрицы A_i и B_i взаимно просты слева, то $T_i^{-1}\in$ R^{nxn}. Отсюда $A_2 = T_2 T_1^{-1} A_1$, $B_2 = T_2 T_1^{-1} B_1$ и тогда в (14) $A_L = C_2T_2 T_1^{-1} A_1 = C_1A_1$ и $B_L = C_2T_2 T_1^{-1} B_1 = C_1B_1$. Следовательно, $C_1 = C_2G$, где матрица G= $T_2 T_1^{-1}$ лежит в R^{nxn} и обратима над R.

Доказательство для A_r и B_r проводится аналогично.

Перейдём к матричным линейным неоднородным уравнениям.

Предложение 4. Уравнение ZA + YB = Δ, где Δ, A$\in$ $R^{m\times m}$, B$\in$ $R^{n\times m}$, A = A_1C, B = B_1C, где C$\in$ $R^{m\times m}$ – ПНОД матриц A и B, имеет хотя бы одно решение Z$\in$ $R^{m\times m}$, Y$\in$ $R^{m\times n}$, тогда и только тогда, когда C является правым делителем матрицы Δ.

Необходимость. Пусть уравнение имеет решение Z и Y. Тогда $ZA_1C + YB_1C = \Delta_1 C = \Delta$, где $\Delta_1 = A_1C + YB_1$.

Достаточность. По условию матрицы A_1 и B_1 взаимно просты справа. Следуя предложению 1 из [6], имеем

$$Z_0A_1 + Y_0B_1 = I_m, \tag{16}$$

для некоторых $Z_0 \in R^{m\times m}$, $Y_0 \in R^{m\times n}$. Если $\Delta = \Delta_1 C$, то умножая (16) слева на Δ_1 а справа на C получим частное решение исходного уравнения $Z = \Delta_1 Z_0$, $Y = \Delta_1 Y_0$.

Теорема. Предположим, что матрицы $A_r \in R^{m\times m}$, rk A_r =m и $B_r \in R^{n\times m}$, взаимно просты справа. Тогда уравнение

$$ZA_r + YB_r = \Delta, \tag{17}$$

при любой матрице $\Delta \in R^{m\times m}$ имеет хотя бы одно такое решение $Z \in R^{m\times m}$, $Y_0 \in R^{m\times n}$, что

$$d(Y) < d(A_l^\beta), \tag{18}$$

где матрица A_l^β определена в (3) и d(.) - наивысшая степень дифференциальных операторов в матрице.

Если матрицы A_r и Δ собственные по столбцам [7] и наивысшие степени дифференциальных операторов в столбцах (cd(.)) матриц удовлетворяют соотношениям

$$cd_i(B_r) < cd_i(A_r) = d_i, \tag{19}$$

$$cd_i(\Delta) = k + d_i,\ i = 1,2\ldots m, \tag{20}$$

где k= d(A_l^β)-1, то все решения уравнения (17), удовлетворяющие неравенству (18), будут таковы, что матрица Z будет полного ранга и правильной по строкам. Причём

$$rd_i(Y) \le rd_i(Z) = k, \quad i = 1,2\ldots m, \tag{21}$$

где rd_i (Y) - наивысшая степень дифференциальных операторов в i-й строке матрицы.

Доказательство. Так как A_r и B_r взаимно просты справа, то согласно [6], найдутся такие матрицы $Z_0 \in R^{m\times m}$, $Y_0 \in R^{m\times n}$, что $Z_0A_1 + Y_0B_1 = I_m$. Отсюда получаем частное решение уравнения (17). Согласно предложению 1, общее решение однородного уравнения $ZA_r + YB_r = 0^{mxm}$ равно $Z = -TB_l^\beta$, $Y = T A_l^\beta$, где матрицы A_l^β и B_l^β определены в (3) и T − произвольная матрица из $R^{n\times n}$. Общее решение уравнения (17) примет вид

$$Z = \Delta Z_0 - TB_l^\beta,\ Y = \Delta Y_0 + TA_l^\beta, \tag{22}$$

Согласно предложению 2 rk A_l^β=n. Согласно предложению 4 в [7], найдутся такие матрицы R, $Q \in R^{m\times n}$, что $\Delta Y_0 = QA_l^\beta + R$ и степень

$d(R) < d(A_l^\beta)=k+1$. Полагая в (22) $T = -Q$, получим решение уравнения (17) $Y=R$, $Z=\Delta Z_0 + QB_l^\beta$, которое удовлетворяет неравенству (18).

Заметим, что степень решения может быть понижена, если, следуя предложению 1 из [7], сделать матрицу A_l^β правильной по строкам.

Следуя [7], и учитывая обозначения (19) и (20), запишем A_r и Δ в форме

$A_r=C_A \mathrm{diag}(p^{d1}\dots p^{dm})+(A_r)_l$, $cd_i((A_r)_l)< d_i$,

$\Delta = C_D \mathrm{diag}(p^{d1+k}\dots p^{dm+k})+(\Delta)_l$, $cd_i((\Delta)_l)< d_i+k$, $i=1,2\dots m$, (23)

где C_A и C_D – матрицы коэффициентов при наивысших степенях оператора дифференцирования p дифференциальных операторов в столбцах матриц A_r и Δ.

Матрицу Z представим в виде

$Z = p^r C_Z + (Z)_l$, (24)

где C_Z – матрица коэффициентов и $d((Z)_l)<r$. Подставляя (23) и (24) в (17) и учитывая неравенства (18), (19) и (20), получаем $C_Z C_A \mathrm{diag}(p^{d1+r}\dots p^{dm+r})+D+YB_r=C_D \mathrm{diag}(p^{d1+k}\dots p^{dm+k})+(\Delta)_l$ для некоторой матрицы $D\in R^{m\times m}$. Причём $cd_i(D)< d_i+r$, $cd_i(YB_r)< d_i+k$, $i=1,2\dots m$. Отсюда имеем $r=k$ и $C_Z C_A=C_D$. По условию матрицы A_r и Δ собственные по столбцам, что равносильно тому, что матрицы коэффициентов C_A и C_D имеют полный ранг [7]. Тогда и матрица C_Z будет невырожденной. Следовательно, невырожденной будет и матрица Z. Таким образом, матрица Z в (24) будет правильной по строкам со степенями строк $rd_i(Z)=k$, $i=1,2\dots m$, а поскольку имеет место неравенство (18), то справедливо и неравенство (21).

Следствие. В скалярном случае ($m=n=1$) решение уравнения (17), удовлетворяющее условию (18) единственно. Причём при $d(\Delta)=2d-1$, где $d=d(A_r)$, получаем $d(Y) \le d(Z)=d-1$.

Доказательство. Пусть существует два решения $Y_1, Y_2\in R$, удовлетворяющие (18). Согласно (22), имеем

$Y_1 - Y_2= T A_l^\beta$, (25)

для некоторого оператора $T\in R$. Из (5) и (6) следует, что $B_l^\beta A_r = A_l^\beta B_r$. По условию операторы A_r и B_r взаимно просты справа. По построению операторы B_l^β и A_l^β взаимно просты слева. Тогда

$d = d(A_r) = d(A_l^\beta)$, $d(B_r) = d(B_l^\beta)$. (26)

Так как, согласно (18) $d(Y) \le d\text{-}1$, то в (25) имеем $d(Y_1 - Y_2) \le d\text{-}1$ и $d(TA_l^{\beta}) \ge d$. Противоречие, следовательно, $Y_1 = Y_2$. Перепишем уравнение (17) $ZA_r = - YB_r + \Delta$. При заданных A_r и B_r и полученном решении Y последнее уравнение имеет единственное решение Z.

В скалярном случае условие (20) с учётом (26) примет вид $d(\Delta)=2d\text{-}1$. Тогда в (21) получим $d(Y) \le d(Z)=d\text{-}1$.

Выводы. Получены конструктивные процедуры решения однородных и неоднородных линейных нестационарных дифференциальных матричных операторных уравнений, основанные на приведении матриц к треугольным формам, которое может осуществляться с помощью систем компьютерной алгебры Maple, Reduce, Singular, Gap и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Обзор зарубежной литературы // Автоматика и телемеханика, 1977. № 3. с. 5-50.
2. Ylinen. An algebraic theory for analysis and synthesis of time-varying linear differentials systems // Acta Politechnica Scandinavica: Math. and Comput., Ser. N 32, Helsinki, 1980. 62 p.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1974. 424 с.
4. Григорьев В.М. Формальные передаточные функции для линейных нестационарных систем // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2004. - с. 3–9.
5. Григорьев В.М. Ранги операторных матриц. // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (28). - Днепропетровск, 2004. - с. 15–19.
6. Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Дніпропетровськ, 2003. - с. 104–112.
7. Григорьев В.М. Правильные операторные матрицы // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (41). - Днепропетровск, 2005. - с. 10–14.

Получено 14.10.2009г.