

УДК 669.01:530.1:539.4

Ю.О. Водолазкий, О.І. Михальов, М.І. Гасик

**ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ  
МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ СПЕКТРІВ ДЛЯ БІНАРНИХ  
ЗОБРАЖЕНЬ**

*Анотація. Робота присвячена оцінюванню похибок методу обчислення мультифрактальних спектрів. Тестується реалізація методу на регулярних фракталах. Досліджується чутливість методу до деяких геометричних перетворень.*

*Ключові слова. Фрактальна геометрія, мультифрактал, розмірності Рен'ї, похибка, тестування.*

**Вступ**

Останнім часом для дослідження властивостей матеріалів все частіше застосовуються засоби фрактальної геометрії [2-6]. Її апарат дозволяє одержати набір кількісних характеристик, що описують неоднорідну структуру реальних матеріалів, за допомогою оцінювання зображень поверхонь. Серед таких характеристик часто використовуються мультифрактальні розмірності, метод розрахунку яких надається в багатьох роботах, наприклад [1, 4, 5]. Цей метод реалізований авторами у вигляді програмного забезпечення MFMet, що з успіхом застосовується для дослідження різних матеріалів [5, 6]. У даній роботі розглянуті питання щодо точності методу обчислення мультифрактальних спектрів і проведено тестування працездатності програмної реалізації.

**Постановка задачі**

Оцінити похибки методу обчислення мультифрактальних спектрів.

Перевірити точність обчислення фрактальної розмірності на регулярних фракталах з відомою фрактальною розмірністю.

Дослідити чутливість методу до геометричних перетворень.

**Метод розрахунку мультифрактальних спектрів**

Ідея методу описувалася в роботах [1, 4, 5]. Коротко викладемо його суть для наочності обчислення похибок. Множину, що досліджується, необхідно виміряти на різних масштабах (рис. 1.а).

Практично це реалізовано за допомогою серії розбивок на квадратні осередки з різною стороною  $\varepsilon$ . Для кожної розбивки обчислюється міра (заселеність) кожного осередку  $p_i(\varepsilon)$  (1) і узагальнена міра  $Z(\varepsilon)$  (2) усієї множини. Далі досліджується залежність узагальненої міри від масштабу виміру  $\varepsilon$  (рис. 1.б).

$$p_i(\varepsilon) = \frac{n_i(\varepsilon)}{N}, \quad (1)$$

де  $n_i(\varepsilon)$  - кількість елементів множини (пікселів) у даному осередку,  $N$  - загальна кількість елементів множини.

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad \forall q \in [q_{\min}; q_{\max}], \quad (2)$$

де  $N(\varepsilon)$  - кількість осередків при їхньому розмірі  $\varepsilon$ ,  $q$  - показник ступеня.

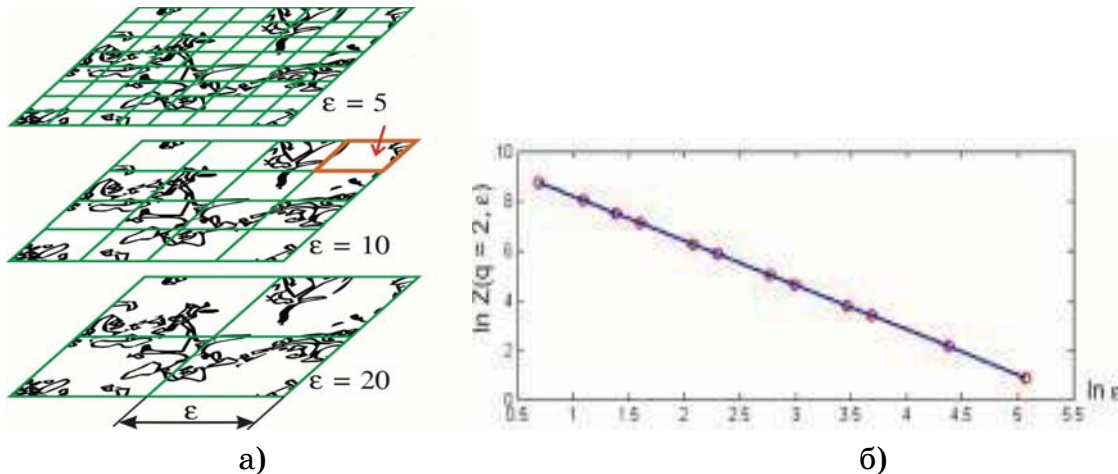


Рисунок 1 – Ілюстрації до розрахунку мультифрактальних розмірностей; а) вимір об'єкта на різних масштабах, б) залежність міри зображення від масштабу виміру

Наявність ступеневої залежності  $Z \sim \varepsilon^{-D}$  із дробовим значенням  $D$  говорить про фрактальні властивості об'єкту, що досліджується. Для дослідження мультифрактальних властивостей об'єкту міра розраховується з додатковим ступеневим параметром  $q$ , що може приймати значення в інтервалі  $-\infty < q < +\infty$ . Те або інше значення показника ступеня  $q$  визначає переважний внесок в узагальнену міру  $Z(q, \varepsilon)$  осередків із приблизно однаковою мірою  $p_i(\varepsilon)$ . Для кожного значення  $q$  досліджується залежність міри  $Z(q, \varepsilon)$  від масштабу виміру  $\varepsilon$  (практично, вимірюється нахил прямої, що апроксимує

залежність  $\ln \varepsilon \sim \ln Z(q, \varepsilon)$  (рис. 1.б)). У результаті спектр розмірностей Рен'ї  $D(q)$  визначається як:

$$D(q) = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (3)$$

### Оцінка похибок обчислень

Похибки непрямих вимірів розмірностей Рен'ї будемо розраховувати за схемою  $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ , де  $\Delta x$  - абсолютна помилка безпосереднього виміру. Безпосередньо вимірюваними величинами будемо вважати множину мір осередків  $\{p_i\}$ , тому що міра осередку  $p_i$  визначається вихідною структурою зображення і є безпосереднім виміром вихідної об'єкта, що досліджується. Таким чином, для абсолютної похибки узагальненої міри  $Z$ , виходячи зі співвідношення (2), маємо:

$$\Delta Z = \sum_i \frac{\partial Z}{\partial p_i} \Delta p_i = \sum_i q p_i^{q-1} \Delta p_i = q \sum_i p_i^q \delta p_i, \quad (4)$$

де  $\Delta p_i$  та  $\delta p_i$  - абсолютна та відносна відповідно похибки міри  $i$ -го осередку.

Тоді для відносної похибки узагальненої міри  $\delta Z$  маємо:

$$\delta Z = \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{q \sum_i p_i^q \delta p_i}{\sum_i p_i^q} = q \sum_i \delta p_i. \quad (5)$$

Далі одержуємо вираз для похибки складових спектру розмірностей Рен'ї:

$$\Delta D = \Delta \ln Z = (\ln Z)' \Delta Z = \frac{\Delta Z}{Z} = \delta Z = q \sum_i \delta p_i, \quad (6)$$

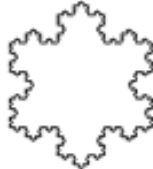
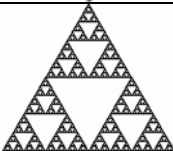
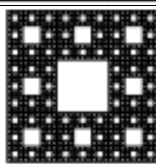
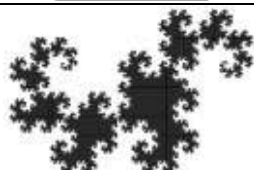
яке визначається похибкою вихідної міри осередків  $\delta p_i$ .

### Тестування методу на регулярних фракталах

Класичні регулярні фрактали мають властивість ідеальної самоподібності і їх фрактальну розмірність можливо розрахувати аналітично, тому вони є ідеальними для перевірки працездатності методу. Фрактали, на яких проводилося тестування програмної реалізації методу, наведені в таблиці 1. Як й очікувалося, мультифрактальні розмірності для кожного зображення приймали одне й те саме значення, яке з невеликою похибкою наближалось до теоретичного.

Таблиця 1

## Обчислення фрактальної розмірності регулярних фракталів

Фрактал		Фрактальна розмірність		
Назва	Зображення	Істинне значення	Оцінка	Похибка, %
Сніжинка Коха		1,262	1,225	2,9
Трикутник Серпінського		1,585	1,501	5,2
Серветка Серпінського		1,893	1,837	2,9
Дракон Хартера-Хейтуея		2	1,987	0,7

## Дослідження чутливості методу до геометричних перетворень зображення


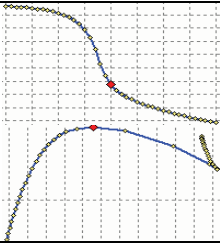
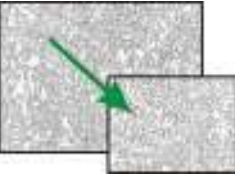
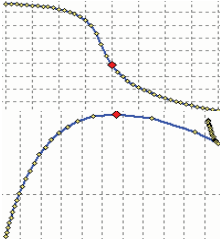
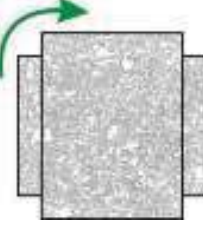
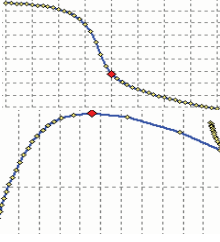
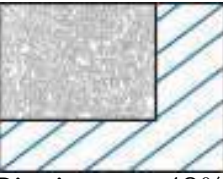
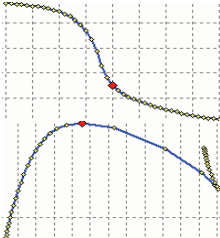
Виконано дослідження чутливості методу до основних геометричних перетворень: зменшенню, повороту, дзеркальному відбиттю, вирізанню частини зображення (див. таблицю 2). Для дослідження було обране зображення поверхні мікрошліфа колісної сталі розміром 640 на 480 пікселів.

Для всіх видів перетворень найбільші похибки спостерігаються для значень мультифрактального спектру при великих (по модулю) показниках ступеня  $q$  (хвосту спектру). Найкращий збіг розрахункових значень із оригіналом дають зображення після таких перетворень як поворот на  $90^\circ$  і дзеркальне відбиття, тому що ці перетворення не змінюють структуру вихідного зображення.

Мультифрактальні характеристики, розраховані для частини зображення-оригіналу ( $\sim 50\%$  площі) досить добре збігаються зі значеннями для вихідного зображення, при дослідженні об'єктів, що мають ознаки самоподібності (теоретичні фрактали, поверхні сталей).

Таблиця 2

Обчислення мультифрактальних параметрів для зображення, після геометричних перетворень

Вид перетворення	Спектри (Рен'ї, мультифрактальний)	Значення вибірових розмірностей	Абсолютне відхилення від вихідного зображення
 Вихідне зображення		$D_0 = 1,904$ $D_1 = 1,883$ $D_2 = 1,868$ $D_1 - D_{20} = 0,123$ $f_{20} = 0,449$	
 Зменшення в 1,64 рази		$D_0 = 1,904$ $D_1 = 1,878$ $D_2 = 1,858$ $D_1 - D_{20} = 0,152$ $f_{20} = 0,471$	$\Delta_{D_0} < 0,001$ $\Delta_{D_1} = 0,005$ $\Delta_{D_2} = 0,01$ $\Delta_{D_1 - D_{20}} = 0,029$ $\Delta_{f_{20}} = 0,022$
 Поворот на $90^\circ$		$D_0 = 1,904$ $D_1 = 1,883$ $D_2 = 1,868$ $D_1 - D_{20} = 0,124$ $f_{20} = 0,398$	$\Delta_{D_0} < 0,001$ $\Delta_{D_1} < 0,001$ $\Delta_{D_2} < 0,001$ $\Delta_{D_1 - D_{20}} = 0,001$ $\Delta_{f_{20}} = 0,051$
 Відсікання 48% площі		$D_0 = 1,904$ $D_1 = 1,884$ $D_2 = 1,868$ $D_1 - D_{20} = 0,119$ $f_{20} = 0,701$	$\Delta_{D_0} < 0,001$ $\Delta_{D_1} = 0,001$ $\Delta_{D_2} < 0,001$ $\Delta_{D_1 - D_{20}} = 0,004$ $\Delta_{f_{20}} = 0,252$

Зменшення зображення й поворот на довільний кут (не кратний  $90^\circ$ ) вносить найбільші помилки в структуру зображення, тому що значення пікселів при цих перетвореннях інтерполюються, і фактично ми маємо нове зображення на основі старого. Як наслідок фрактальні параметри мають найбільше відхилення від значень для вихідного зображення.

Як бачимо, зазначені види перетворень достатні, а в більшості випадків надлишкові для реальних завдань.

#### Висновки

У роботі отримані аналітичні вираження похибок обчислень спектру розмірностей Рен'ї, що дозволяє контролювати точність обчислень. Тестування реалізації методу обчислення мультифрактальних спектрів на регулярних фракталах дало результати, що узгоджуються з теорією. Було виявлено стійкість методу до основних геометричних перетворень, що дає можливість його коректного застосування для зображень матеріалів, що отримані у різних умовах цифрової фотозйомки. Таким чином, дослідження точності методу розрахунку мультифрактальних спектрів обґрунтовує його застосування при вирішенні реальних задач кількісного опису матеріалів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Harte D. Multifractals: theory and applications. – Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. Иванова В.С. Синергетика: Прочность и разрушение металлических материалов / М.: Наука, 1992, 160 с.
3. Помулев В.В. Разработка моделей фрактальных структур металлических материалов: дисс. канд. техн. наук: 01.05.02 / Помулев Валерий Валериевич. – Днепропетровск, 2005.
4. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Монография. – М.: Ижевск, 2003.
5. Оценка параметров мультифрактальных моделей металлографических изображений / Михалев А.И., Деревянко А.И., Водолазский Ю.А., Помулев В.В. – Современные проблемы металлургии. – Том 7, 2004. – С. 140-148.
6. Михалев А.И., Водолазский Ю.А. Мультифрактальный анализ в задачах оценивания качества медных покрытий // Нові Технології. – 2(12). – Кременчук: КУЕІТУ, 2006. – С. 184-188.
7. Михальов О.І., Водолазький Ю.О. Вейвлет-мультифрактальний аналіз складних зображень // Вісник ВПІ. – Випуск 2. – Вінниця, 2009. – С. 84-87.