УДК 681.5

О.Н. Кукушкин, Е.Г. Бойко

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. Построена полумарковская модель процесса контроля параметрических отказов автоматизированной системы, найдены стационарные характеристики надежности и качества ее функционирования.

Многообразие автоматизированных систем (АС) и выпускаемой продукции, новые виды автоматизированного контроля ставят перед наукой задачу повышения надежности и качества. Решение этой проблемы весьма актуально в наши дни, так как сложность АС требует высокой точности результатов контроля безотказной работы всех элементов, сокращения времени их восстановления после обнаружения отказа.

В современных источниках [1, 2] рассматриваются математические модели процесса контроля, учитывающие влияние только его периодичности на надежность и эффективность АС, при этом мало внимания уделяется влиянию различных стратегий и точности контроля[3].

В статье представлена математическая модель контроля параметрических отказов автоматизированной восстанавливаемой системы, в которой отказ любого элемента влечет за собой выход из строя всей системы, что позволяет рассматривать ее как однокомпонентную. Предполагается, что параметрический отказ может быть обнаружен только при включенном контроле. Для описания процесса контроля-восстановления АС используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [4].

Рассмотрим систему, функционирующую следующим образом. В начальный момент времени система находится в работоспособном состоянии, контроль включен. Время безотказной работы системы – случайная величина (СВ) α с функцией распределения (ФР) $F(t) = P\{\alpha \le t\}$ и плотностью распределения (ПР) $f(t)$. Контроль проводится через случайное время δ с ФР $R(t)=P\{\delta \le t\}$ и ПР $r(t)$. Во время проведения контроля работа системы приостанавливается. Длительность проведения контроля СВ γ с ФР $V(t)=P\{\gamma \le t\}$ и ПР $v(t)$. Время восстановления системы после обнаружения отказа СВ β с ФР $G(t)=P\{\beta \le t\}$ и ПР $g(t)$. На период восстановления контроль приостанавливается. После восстановления все свойства системы обновляются.

Для описания функционирования системы введем следующее пространство полумарковских состояний:

$$E=\{111, 212x_1, 211x_1, 101x_2, 202, 220\}.$$

Здесь 111 – система начала работать, контроль включен; $212x_1$ – начался контроль, система работоспособна, на время проведения контроля ее работа приостанавливается, до наступления параметрического отказа осталось время x_1 (без учёта времени остановки системы); $211x_1$ – контроль окончился, система продолжила работу, до наступления параметрического отказа осталось время x_1 (без учёта времени возможной остановки системы); $101x_2$ – наступил параметрический отказ, до начала контроля осталось время x_2; 202 – начался контроль, система в отказе; 220 – закончился контроль, обнаружен отказ, началось восстановление системы, контроль приостановлен.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \ge 0\}$:

$$P_{111}^{212x_1}=\int_0^\infty f(x_1+t)r(t)dt; \qquad P_{111}^{101x_2}=\int_0^\infty r(x_2+t)f(t)dt; \qquad p_{211x_1}^{212y_1}=r(x_1-y_1),$$

$$0<y_1<x_1; \; p_{211x_1}^{101x_2}=r(x_1+x_2), \; x_2>0; \; P_{212x_1}^{211x_1}=P_{101x_2}^{202}=P_{202}^{220}=P_{220}^{111}=1. \quad (1)$$

Обозначим через $\rho(111)$, $\rho(202)$ и $\rho(220)$ значение стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n, n \ge 0\}$ на состояниях 111, 202 и 220 и предположим существование стационарной плотности $\rho(212x_1)$, $\rho(211x_1)$ и $\rho(101x_2)$ для состояний $212x_1$, $211x_1$ и $101x_2$ соответственно. Составим для них систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(111) = \rho(220), \\ \rho(220) = \rho(202), \\ \rho(202) = \int\limits_0^\infty \rho(101x_2)dx_2, \\ \rho(212x_1) = \rho(111)\int\limits_0^\infty f(x_1+t)r(t)dt + \int\limits_{x_1}^\infty \rho(211y_1)r(y_1-x_1)dy_1, \\ \rho(211x_1) = \rho(212x_1), \\ \rho(101x_2) = \rho(111)\int\limits_0^\infty r(x_2+t)f(t)dt + \int\limits_0^\infty \rho(211y_1)r(y_1+x_2)dy_1, \\ 3\rho_0 + \int\limits_0^\infty \rho(101x_2)dx_2 + 2\int\limits_0^\infty \rho(212x_1)dx_1 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Последнее уравнение в системе (2) – условие нормировки.

Можно показать, что система уравнений (2) имеет следующее решение [5]:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(111) = \rho(220) = \rho(202), \\ \rho(211x) = \rho(212x) = \rho_0\int\limits_0^\infty h_r(t)f(x+t)dt, \\ \rho(101x) = \rho_0\int\limits_0^\infty \nu_r(z,x)f(z)dz. \end{cases} \quad (3)$$

В (3) ρ_0 находится их условия нормировки; $h_r(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления, $r^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции $r(t)$; $\nu_r(z,x) = r(z+x) + \int\limits_0^z r(z+x-s)h_r(s)ds$ – плотность распределения прямого остаточного времени для процесса восстановления.

Для описываемой АС множества работоспособных состояний E_+ и отказовых состояний E_- имеют вид:

$E_+ = \{111, 211x_1\}$, $E_- = \{212x_1, 101x_2, 202, 220\}$.

Найдем средние времена пребывания в состояниях:

$$M\theta_{111} = \int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{R}(t)dt\,; \quad M\theta_{211x_1} = \int\limits_0^{x_1} \overline{R}(t)dt\,; \quad M\theta_{212x_1} = M\gamma\,;$$

$$M\theta_{202} = M\gamma\,; \quad M\theta_{101x_2} = x_2\,; \quad M\theta_{220} = M\beta\,. \quad (4)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- найдем по формулам [6]:

$$T_+ = \frac{\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int\limits_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)}, \quad T_- = \frac{\int\limits_{E_-} m(e)\rho(de)}{\int\limits_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)}. \tag{5}$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение ВЦМ, $m(e)$– среднее время пребывания в состоянии $e \in E = E_+ \cup E_-$; $P(e, E_-)$– вероятности переходов ВЦМ из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом формул (1), (3) и (4), найдем выражения, входящие в (5):

$$\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) = m(111)\rho(111) + m(211x_1)\rho(211x_1) =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{R}(t)dt + \rho_0 \int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^{x_1} \overline{R}(t)dt \int\limits_0^\infty h_r(y)f(x_1 + y)dy = \tag{6}$$

$$= \rho_0 \left(\int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{R}(t)dt + \int\limits_0^\infty \overline{R}(t)dt \int\limits_t^\infty dx_1 \int\limits_0^\infty h_r(y)f(x_1 + y)dy \right).$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям второе слагаемое выражения (6), получаем:

$$\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) = \rho_0 M\alpha \; .$$

$$\int\limits_{E_-} m)(e)\rho(de) = m(212x_1)\rho(212x_1) + m(101x_2)\rho(101x_2) + m(202)\rho(202) +$$

$$+m(220)\rho(220) =$$

$$= \rho_0 M\gamma \int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^\infty h_r(t)f(x_1 + t)dt + \rho_0 \int\limits_0^\infty x_1 dx_1 \int\limits_0^\infty \nu_r(z, x_1)f(z)dz + \rho_0 M\gamma + \rho_0 M\beta =$$

$$= \rho_0 \left(M\gamma + M\beta + M\gamma \int\limits_0^\infty h_r(t)dt \int\limits_0^\infty f(x_1 + t)dx_1 + \int\limits_0^\infty f(z)dz \int\limits_0^\infty x_1 \nu_r(z, x_1)dx_1 \right) =$$

$$= \rho_0 \left(M\gamma + M\beta + M\gamma \int\limits_0^\infty h_r(t)\overline{F}(t)dt + \int\limits_0^\infty f(z) \left(M\delta \hat{H}_r(z) - z \right) dz \right) =$$

$$= \rho_0 \left(M\gamma + M\beta - M\alpha + M\gamma \int\limits_0^\infty \overline{F}(t)h_r(t)dt + M\delta \int\limits_0^\infty \hat{H}_r(z)f(z)dz \right). \tag{7}$$

Проинтегрировав по частям четвертое слагаемое выражения (7), получим:

$$\int_{E_-} m)(e)\rho(de) = \rho_0 \left(M\beta - M\alpha + \left(M\delta + M\gamma \right) \int_0^\infty \hat{H}_r(t) f(t)dt \right),$$

где $\hat{H}_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{*(n)}(t)$ – функция восстановления, $R^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции $R(t)$.

Далее находим:

$$\int_{E_+} P(e, E_-)\rho(de) = P(111, E_-)\rho(111) + P(211x_1)\rho(211x_1) = \rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty f(x_1 + t) r(t)dt +$$

$$+\rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty r(x_1 + t) f(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty h_r(z) f(x_1 + z)dz \int_0^{x_1} r(x_1 - y)dy +$$

$$+\rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty h_r(z) f(x_1 + z)dz \int_0^\infty r(x_1 + y)dy =$$

$$= \rho_0 \left(1 + \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty h_r(z) f(x_1 + z) R(x_1)dz + \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty h_r(z) f(x_1 + z) \overline{R}(x_1)dz \right) =$$

$$= \rho_0 \left(1 + \int_0^\infty h_r(z)dz \int_0^\infty f(x_1 + z)dx_1 \right) = \rho_0 \left(1 + \int_0^\infty \overline{F}(z) h_r(z)dz \right) = \rho_0 \int_0^\infty \hat{H}_r(z) f(z)dz.$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ имеет вид:

$$T_+ = \frac{M\alpha}{\int_0^\infty \hat{H}_r(z) f(z)dz}.$$

Среднее стационарное время восстановления T_- определяется формулой:

$$T_- = \frac{M\beta - M\alpha + \left(M\delta + M\gamma \right) \int_0^\infty \hat{H}_r(t) f(t)dt}{\int_0^\infty \hat{H}_r(z) f(z)dz}.$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения: $K_\Gamma = \dfrac{T_+}{T_+ + T_-}$.

Получаем

$$K_\Gamma = \frac{M\alpha}{M\beta + \left(M\delta + M\gamma \right) \int_0^\infty \hat{H}_r(t) f(t)dt}.$$

Не менее важными характеристиками для оценки качества функционирования АС, являются экономические критерии, такие как средняя прибыль в единицу календарного времени S и средние затраты в единицу времени исправного функционирования C. Для их определения воспользуемся формулами [2]:

$$S=\frac{\int_E m(e)f_s(e)\rho(de)}{\int_E m(e)\rho(de)},\qquad C=\frac{\int_E m(e)f_c(e)\rho(de)}{\int_{E_+} m(e)\rho(de)}. \tag{8}$$

Здесь $f_S(e)$ и $f_C(e)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Для данной АС функции f_s и f_c имеют вид:

$$f_s(e)=\begin{cases}c_1, e\in\{111,211x_1\},\\ -c_2, e=220,\\ -c_3, e\in\{212x_1,202\},\\ -c_4, e=101x_2,\end{cases}\qquad f_c(e)=\begin{cases}0, e\in\{111,211x_1\},\\ c_2, e=220,\\ c_3, e\in\{212x_1,202\},\\ c_4, e=101x_2,\end{cases} \tag{9}$$

где c_1 – прибыль, получаемая за единицу времени функционирования; c_2 – затраты за единицу времени восстановления; c_3 – затраты за единицу времени на контроль; c_4 – потери за единицу времени от брака.

Используя соотношения (3), (4) и (9), находим значения выражений (8):

$$S=\frac{M\alpha(c_1+c_4)-c_2M\beta-(c_3M\gamma+c_4M\delta)\int_0^\infty \hat{H}_{r_1}(t)f(t)dt}{M\beta+(M\delta+M\gamma)\int_0^\infty \hat{H}_{r_1}(t)f(t)dt};$$

$$C=\frac{c_2M\beta-c_4M\alpha\ +(c_4M\delta+c_3M\gamma)\int_0^\infty \hat{H}_r(t)f(t)dt}{M\alpha}.$$

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации процесса контроля-восстановления АС для различных стратегий контроля. В дальнейшем планируется использовать полученную методику для построения и исследования математических моделей многокомпонентных АС с последовательным и параллельным соединениями, а также для различных видов контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов/Г.Н. Черкесов. – СПб.: Изд-во «Питер», 2005. – 479 с.

2. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем (теория и практика)/ В.А. Каштанов, А.И. Медведев. – М.: Изд-во «Европейский центр по качеству», 2002. – 470 с.

3. Кузнецов П.И. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных систем/ В.С. Гайденко, Б.К. Жилюк, С.К. Крылов и др. – М.: Энергия, 1969. – 480 с.

4. Королюк В.С. Стохастические модели систем/В.С. Королюк. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.

5. Обжерин Ю.Е. Полумарковская модель процесса восстановления с переключением/Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский, А.В. Скатков// Динамические системы: Науч.сб. – 1992. – № 10. – С. 63 – 68.

6. Копп В.Я. Стохастические модели автоматизированных систем с временным резервированием/В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. – Севастополь: Изд-во СевГТУ , 2000. – 284 с.