

УДК 658.562

Є.В. Чернецький

**АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ДЕФОРМАЦІЇ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНОГО
КАНАЛУ (ЯКЩО ДОПОМІЖНІ ВЕЛИЧИНИ ФОРМУЮТЬСЯ БЕЗ
ПОХИБКИ)**

Анотація. Розглянуто структурно-алгоритмічний метод підвищення вірогідності контролю, який полягає у деформації характеристики перетворення вимірювального каналу. Наведено цільові функції ефективності та визначено критерії вибору типу циклу деформації. Ключові слова. Вимірювальний канал, вірогідність контролю, систематична похибка, деформація характеристики перетворення.

Вступ

Підвищення вірогідності отриманої інформації – це завдання, яке необхідно вирішувати, враховуючи як економічні, так і технологічні показники [1, 2]. Створення галузевих методів дозволить використовувати їх серійно в певній галузі та зробить їх більш ефективними (так як будуть враховані умови експлуатації і метод не буде ускладнений непотрібними для даного випадку обмеженнями).

Однією з галузей, де можна застосовувати методи підвищення вірогідності отриманої інформації є енергетика. Як правило, промислові спалювальні установки обладнуються системами контролю за режимом горіння. При цьому первинні вимірювальні перетворювачі, які знаходяться на об'єкті, віддалені від вимірювальних перетворювачів і систем керування, що у свою чергу знаходяться у спеціалізованих приміщеннях. У зв'язку з такою особливістю вимірювальні канали мають з'єднувальні лінії десятків, а то і сотень метрів, що пролягають поміж обладнанням. При цьому на лінії зв'язку постійно впливатимуть промислові завади, що призведе до появи адитивної складової систематичної похибки. З іншого боку, при роботі спалювальних установок на твердому та рідкому паливі до атмосфери викидаються оксиди сірки, які при контакті з вологим повітрям можуть утворювати кислоту, яка у свою чергу руйнуватиме ізоляцію з'єднувальних ліній. А це призведе до

© Чернецький Є.В., 2009

витоку струму i , як наслідок, до появи мультиплікативної складової систематичної похибки.

Тому провадження методів підвищення вірогідності в системи контролю за роботою спалювальних установок дозволить знизити викиди шкідливих речовин в атмосферне повітря та зменшити екологічні витрати за рахунок точного дотримання режиму горіння [3].

Мета дослідження

Проаналізувати ймовірність появи помилкових рішень для мультиплікативного та адитивного циклів деформації при введенні елементів, що використовуються для деформації характеристики перетворення, у середину вимірювального каналу. Отримати узагальнювальні вирази, які дозволять визначити ймовірність помилкових рішень при контролі на будь якому етапі та циклі деформації.

Постановка задачі

З огляду на метод деформації характеристики перетворення вимірювального каналу можна визначити основні фактори, які впливатимуть на ефективність методу [3]. Відповідно до цього необхідно визначити, яким чином впливають на ефективність методу наступні фактори:

- відношення довжини довірчого інтервалу контролю до параметрів розподілу контрольованої величини (для цього в розрахунках вводиться коефіцієнт B , який дорівнює $B_{p,a} = (x_b - x_n)/2a$ – для рівномірного та арксинусоїдального законів розподілу, та $B_n = (x_b - x_n)/2\sigma$ – для нормального закону розподілу);
- несиметричність границь довірчого інтервалу відносно математичного сподівання, яке відображається за допомогою коефіцієнта N , який дорівнює $N = (M_x - x_n)/(x_b - M_x)$ – для всіх законів розподілу, якщо закон симетричний, то $N=1$;
- співвідношення між складовими систематичної похибки (для адитивної складової вводиться відносний параметр $\mu = \Delta/M_x$);
- кількість циклів деформації;
- вид циклу деформації.

Розробка алгоритму використання методу

Для оцінки ефективності методів деформації характеристики і зміни її як усередині циклу, так і від циклу до циклу, а також дослідження зміни ефективності від кількості циклів буде розглядатися, як відношення вихідної ймовірності помилкових рішень $P_{\text{пом}}$ до ймовірності помилкових рішень після деформації P_A – ймовірність прийняття помилкових рішень при адитивному циклі

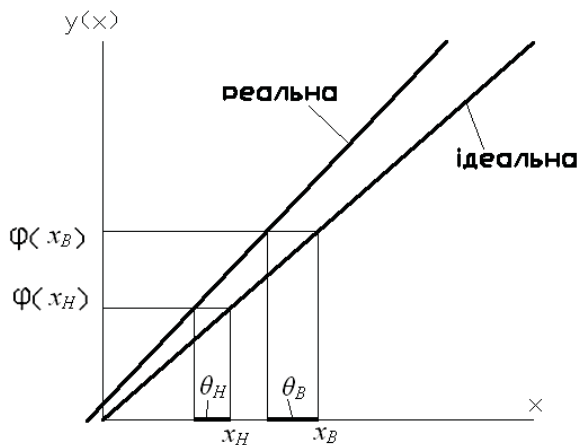


Рис. – 1 Механізм утворення неправильних рішень

деформації та P_M – при мультиплікативному циклі деформації. Відповідно до цього ефективність методу буде позначатися $J_A = P_{\text{пом}} / P_A$ та $J_M = P_{\text{пом}} / P_M$.

При оцінюванні ефективності методу будемо розглядати найбільш поширені закони розподілу контрольованих величин,

рівномірний розподіл, та Гаусівський (нормальний) розподіл, а також будемо розглядати арксинусоїдальний закон розподілу.

Відповідно до рис. 1 ймовірність прийняття рішень, придатний для ідеальної характеристики перетворення, буде визначатися як

$$P_{\text{пр}}^{\text{ід}} = \int_{x_H}^{x_B} f(x) dx, \text{ а для реальної характеристики перетворення}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}}^{\text{реал}} &= \int_{x_H - \theta_H}^{x_B - \theta_B} f(x) dx = \\ &= \int_{x_H - \theta_H}^{x_H} f(x) dx + \int_{x_H}^{x_B} f(x) dx + \int_{x_B}^{x_B - \theta_B} f(x) dx = \int_{x_H - \theta_H}^{x_H} f(x) dx + \int_{x_H}^{x_B} f(x) dx - \int_{x_B - \theta_B}^{x_B} f(x) dx \end{aligned}$$

Якщо записати цей вираз з урахуванням виду відмови, то отримаємо:

$P_{\text{пр}}^{\text{реал}} = P_H + P_{\text{пр}}^{\text{реал}} - P_X$, де P_X – ймовірність хибної відмови, P_H – ймовірність невизначеної відмови. Графічно це можна зобразити наступним чином.

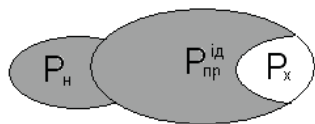


Рис. – 2 Зміна ймовірності прийняття рішення придатний для реальної характеристики перетворення

Відповідно до рис.2 найбільшим еліпсом зображено ймовірність прийняття рішень, придатний для ідеальної характеристики. Але

внаслідок впливу систематичних похибок реальна характеристика буде відрізнятися від ідеальної, внаслідок чого зміниться $P_{пр}$. При цьому ймовірність невизначених відмов буде призводити до збільшення $P_{пр}$, а ймовірність хибних відмов – до зменшення. У результаті чого результативна ймовірність прийняття рішення придатний для реальної характеристики перетворення, буде визначатися зоною, замальованою сірим кольором.

Далі для адекватного оцінення ефективності методу будемо проводити аналіз зміни сумарної площі, позначених на рис. 2 як P_H і P_X , у процесі деформації характеристики перетворення.

Спочатку визначимо цільову функцію для рівномірного закону розподілу. Для даного випадку маємо найпростіший варіант визначення ефективності методу, так як вона буде прямо пропорційно залежати від еквівалентних інтервалів зміщення.

Відповідно до методу деформації характеристики перетворення ВК ймовірність прийняття помилкових рішень до деформації можна визначити як $P_{пом} = (\theta_B + \theta_H) \cdot A$ (2.9), де A – параметр розподілу контрольованої величини [4].

Тепер визначимо вираз для ймовірності помилкових рішень після деформації. Спочатку розглянемо адитивний цикл деформації. Ймовірність помилкових рішень відповідно на першому та другому етапі деформації:

$$P_1^a = \theta_{e1} \cdot A = \alpha x_n (\beta - 1) \cdot A \quad \text{та} \quad P_2^a = \theta_{n1} \cdot A = \alpha x_n \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot A$$

Тепер визначимо ефективність методу відповідно на першому та другому етапі:

$$J_1^a = \frac{P_{пом}}{P_1^a} = \frac{(\theta_e + \theta_n) \cdot A}{\theta_{e1} \cdot A} = \frac{\alpha(x_e + x_n) + 2\Delta}{\alpha x_n (\beta - 1)}$$

$$J_2^a = \frac{P_{пом}}{P_2^a} = \frac{(\theta_e + \theta_n) \cdot A}{\theta_{n1} \cdot A} = \frac{\alpha(x_e + x_n) + 2\Delta}{\alpha x_n \frac{(\beta - 1)}{\beta}} \quad (1)$$

Аналогічним чином отримаємо ймовірність помилкових рішень при мультиплікативному циклі деформації:

$$P_1^m = \theta_{n1} \cdot A = \Delta \frac{(\beta - 1)}{\beta} \cdot A \quad \text{та} \quad P_2^m = \theta_{e1} \cdot A = \Delta \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot A$$

Звідси отримаємо ефективність для мультиплікативного циклу:

$$J_1^m = \frac{P_{пом}}{P_1^m} = \frac{(\theta_e + \theta_n) \cdot A}{\theta_{n1} \cdot A} = \frac{\alpha(x_e + x_n) + 2\Delta}{\Delta \frac{(\beta - 1)}{\beta}} \quad (2)$$

Як видно з цільових функції (1, 2) ефективність методу при рівномірному законі розподілу контрольованого параметру не залежить від значення параметру розподілу A . Тому далі будемо розглядати цільову функцію як залежність від значення параметру α та Δ . Для того щоб визначити характер функції, обчислимо першу похідну та визначимо, чи має функція екстремуми і які саме.

Після обчислень було визначено, що при мультиплікативному циклі деформації функція J_m^1 буде мати один екстремум (мінімум) при наступному співвідношенні складових похибки:

$$a = -\frac{2\Delta}{(x_e + x_n)}. \quad (3)$$

Припустимо, що адитивна складова похибки складає 10% від математичного сподівання ($\Delta=0,1M_x$), а довжина допускового інтервалу 40% від M_x ($x_n=M_x-0,2M_x$, $x_b=M_x+0,2M_x$), то вираз (3) матиме вигляд:

$$a = -\frac{2 \cdot 0,1 \cdot M_x}{(M_x - 0,2 \cdot M_x) + (M_x + 0,2 \cdot M_x)} = -\frac{2 \cdot 0,1 \cdot M_x}{M_x + M_x} = -0,1$$

Таким чином, метод матиме найменшу ефективність при значеннях параметру α , близьких за модулем до значення адитивної складової похибки, але з протилежним знаком, тобто коли $a = -\Delta/M_x$. Якщо перейти до мультиплікативної складової похибки отримаємо:

$$\alpha = -\Delta/M_x; \quad \frac{\gamma}{1+\gamma} = -\frac{\Delta}{M_x}; \quad \gamma M_x = -\Delta - \Delta\gamma; \quad \gamma M_x + \Delta\gamma = -\Delta; \quad \gamma = \frac{-\Delta}{M_x + \Delta}$$

Проаналізуємо яким, чином впливає адитивна складова систематичної похибки. Тоді вираз (2) матиме вигляд

$$J_1^m(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (x_e + x_n)}{\beta - 1} + \frac{2 \cdot \beta}{\beta - 1}, \text{ тобто функціональну залежність типу}$$

$Y(x)=1/x$ функція даного виду не має екстремумів і не дорівнює нулю.

Далі розглянемо адитивний цикл деформації. У цьому випадку будемо розглядати дві функції (для першого та другого циклів деформації). Згідно з (1) цільові функції залежно від α матимуть вигляд:

$$J_1^a(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2\Delta}{x_n(\beta - 1)} + \frac{(x_e + x_n)}{x_n(\beta - 1)}, \quad J_2^a(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2\Delta \cdot \beta}{x_n(\beta - 1)} + \frac{(x_e + x_n) \cdot \beta}{x_n(\beta - 1)}$$

Отже, ми отримали залежності типу $Y(x)=1/x$. Причому ефективність на другому етапі деформації буде в β разів більше, ніж

на першому етапі. Як і для мультиплікативного циклу (з таким видом залежності) у даному випадку екстремумів не буде. Звідси можна припустити, що адитивний цикл деформації також буде мати тільки одну точку мінімальних значень ефективності функції. Для перевірки цього припущення дослідимо функцію на залежність від Δ :

$$J_1^a(\Delta) = \Delta \cdot \frac{2}{\alpha x_n (\beta - 1)} + \frac{\alpha(x_a + x_n)}{\alpha x_n (\beta - 1)}, \quad J_2^a(\Delta) = \Delta \cdot \frac{2\beta}{\alpha x_n (\beta - 1)} + \frac{\alpha(x_a + x_n) \cdot \beta}{\alpha x_n (\beta - 1)}$$

Тепер визначимо точку мінімальних значень.

$$J_1^a(\Delta) \Rightarrow \Delta = -\frac{\alpha(x_a + x_n)}{2}, \quad J_2^a(\Delta) \Rightarrow \Delta = -\frac{\alpha(x_a + x_n)}{2} \quad (4)$$

Як видно, точка мінімальної ефективності буде співпадати як для першого, так і для другого етапу деформації. Як і в попередньому випадку, підставимо замість x_n , x_b та Δ їх значення, виражені через математичне сподівання:

$$0,1M_x = -\frac{\alpha(0,2M_x + M_x + M_x - 0,2M_x)}{2} = -\frac{\alpha \cdot 2M_x}{2} = -\alpha \cdot M_x \Rightarrow \alpha = -0,1$$

Отримані вирази свідчать, що мінімальна ефективність спостерігається у випадку, коли $\alpha = -\Delta/M_x$.

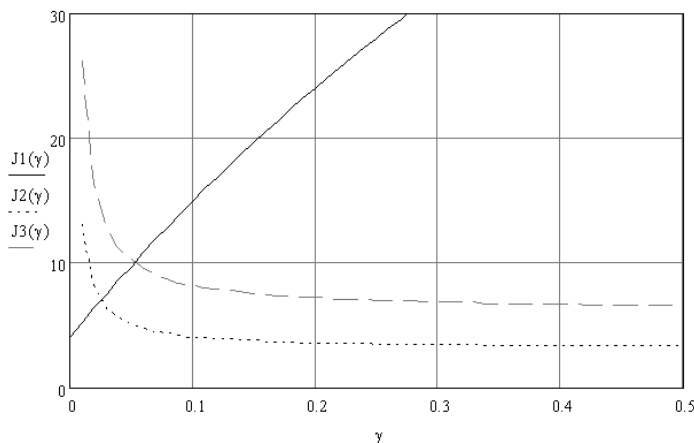


Рис. – 3 Цільові функції ефективності для рівномірного закону розподілу

Отриманий результат цілком співпадає зі співвідношенням для мультиплікаційного циклу.

Для оцінки, при якому співвідношенні буде ефективний той чи інший цикл деформації, проведемо числове моделювання, тобто

отримаємо графічні залежності цільових функцій (1) та (2). На рис. 3 зображено цільові функції ефективності $J1(\gamma)$ – для мультиплікативного циклу деформації, $J2(\gamma)$ та $J3(\gamma)$ – відповідно перший та другий етапи адитивного циклу деформації.

Як видно з рисунку, при одних і тих же значеннях складових похибки мультиплікативний та адитивний цикл деформації мають різну ефективність. При оціненні ефективності будемо аналізувати другий етап адитивного циклу та перший мультиплікативного.

Визначимо точку перетину цільових функцій для мультиплікативного та адитивного циклу, для цього порівняємо вирази (1) та (2). Після розв'язання рівняння отримаємо:

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_n \cdot \beta - \Delta}. \quad (5)$$

Зважаючи на отриманий результат та рис. 3, можна стверджувати, що при значенні $\gamma < \frac{\Delta}{x_n \cdot \beta - \Delta}$ доцільно використовувати адитивний цикл деформації (виконувати обидва етапи), а в іншому випадку використовувати мультиплікативний цикл деформації (виконувати тільки перший етап). Далі співвідношення (5) будемо називати граничним при виборі того чи іншого циклу деформації.

Розглянемо, яким чином впливає симетричність границь контролю відносно математичного сподівання на ефективність методу деформації. Для аналізу будемо використовувати отримані співвідношення складових похибки (3) та (4) і підставляти замість x_n , x_b та Δ їх значення, виражені через математичне сподівання. Будемо розглядати два випадки несиметричності:

$$\text{а) } x_e = M_x + 0,3M_x, x_n = M_x - 0,1M_x, N = \frac{M_x - x_n}{x_e - M_x} = \frac{M_x - M_x + 0,1M_x}{M_x + 0,3M_x - M_x} = 0,3;$$

$$\text{б) } x_e = M_x + 0,1M_x, x_n = M_x - 0,3M_x, N = \frac{M_x - x_n}{x_e - M_x} = \frac{M_x - M_x + 0,3M_x}{M_x + 0,1M_x - M_x} = 3.$$

Для адитивного циклу деформації співвідношення (4) з урахуванням умови несиметричності матиме вигляд:

а)

$$0,1M_x = -\frac{\alpha(0,3M_x + M_x + M_x - 0,1M_x)}{2} = -\frac{\alpha \cdot 2,2M_x}{2} = -1,1\alpha M_x \Rightarrow \alpha = -\frac{0,1}{1,1} = -0,09$$

б)

$$0,1M_x = -\frac{\alpha(0,1M_x + M_x + M_x - 0,3M_x)}{2} = -\frac{\alpha \cdot 1,8M_x}{2} = -0,9\alpha M_x \Rightarrow \alpha = -\frac{0,1}{0,9} = -0,11$$

Тепер розглянемо співвідношення (3) для мультиплікативного циклу:

$$\text{а) } \alpha = -\frac{2 \cdot 0,1M_x}{(M_x - 0,3M_x) + (M_x + 0,3M_x)} = -\frac{0,2M_x}{2,2M_x} = -0,09;$$

$$\text{б) } \alpha = -\frac{2 \cdot 0,1M_x}{(M_x - 0,3M_x) + (M_x + 0,1M_x)} = -\frac{0,2M_x}{1,8M_x} = -0,11.$$

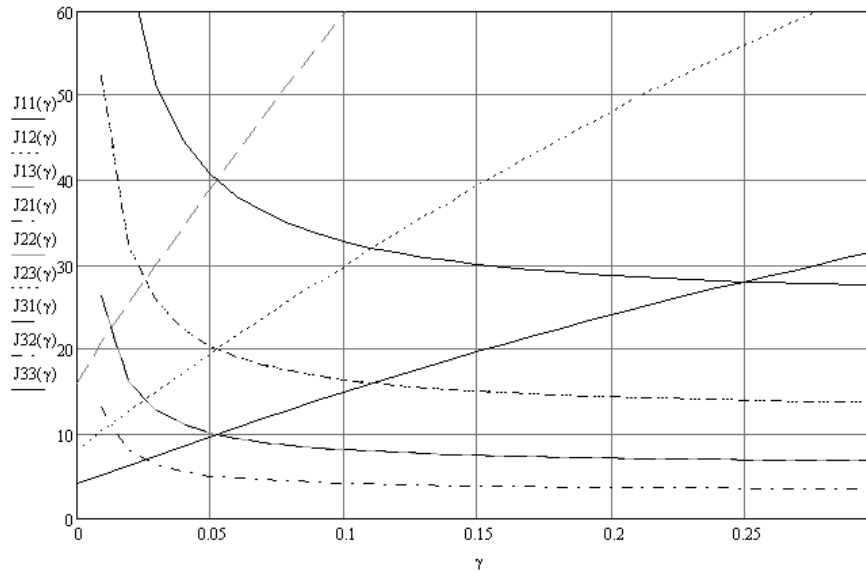


Рис. – 4 Цільові функції ефективності для рівномірного закону розподілу при трьох циклах деформації

Таким чином, при зміні симетричності розташування границь контролю відносно математичного сподівання відбувається незначне зміщення точки мінімального значення цільової функції. А саме зміщення становить близько 1%. З огляду на отриманий результат несиметричності границь контролю можна знехтувати і обирати той чи інший цикл деформації, виходячи зі співвідношення складових похибки.

При порівняльному аналізі циклів деформації для декількох циклів було отримано залежності, представлені на рис. 4, де цільові функції ефективності $J_{11}, 12, 13(\gamma)$ – для мультиплікативного циклу деформації, $J_{21}, 22, 23(\gamma)$ та $J_{31}, 32, 33(\gamma)$ – відповідно перший та другий етапи адитивного циклу деформації. Друга цифра позначає номер циклу деформації, для наглядності обмежимося трьома циклами деформації.

Як видно з рис. 4 при збільшенні кількості циклів деформації не відбувається зміщення граничного співвідношення складових систематичної похибки, тому кількість циклів деформації не буде впливати на вибір циклу.

Далі аналогічним чином було проведено аналіз методу деформації характеристики перетворення при розподілі

контрольованого параметру за нормальним та арксинусоїдальним законами розподілу. У результаті чого було отримано наступні дані:

- цільова функція ефективності на мультиплікативному циклі буде мати тільки одну точку мінімальної ефективності;
- цільова функція ефективності на адитивному циклі буде мати одну точку мінімальної та максимальної ефективності;
- мінімуми цільових функцій для адитивного та мультиплікативного циклів не співпадають;
- на відміну від випадку розподілу контрольованого параметру за рівномірним законом розподілу при нормальному та арксинусоїдальному законі розподілу буде спостерігатися двопараметрове граничне обмеження. Якщо виконується нерівність $\gamma_A < \gamma < \gamma_B$ (рис. 5), то необхідно виконувати адитивний цикл деформації, при невиконанні нерівності – мультиплікативний.

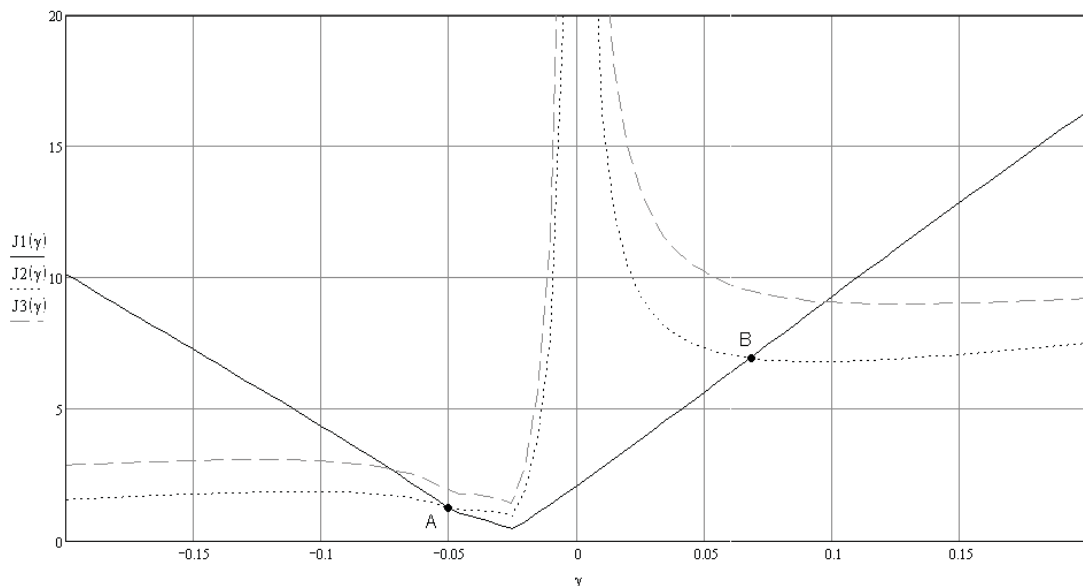


Рис. – 5 Цільові функції ефективності для нормального закону розподілу

На відміну від випадку з рівномірним розподілом, при отриманні точок перетину для арксинусоїдального та нормального розподілу було отримано вирази, які враховують і ширину довірчого інтервалу, симетричність цього інтервалу, а також співвідношення складових похибки. Таким чином розрахунок значень γ_A та γ_B враховує вплив всіх зазначених факторів.

Висновки. Таким чином, проведений аналіз дозволяє чітко сформулювати критерії вибору типу циклу деформації для методу деформації характеристики перетворення ВК:

- при рівномірному розподілі контрольованого параметру метод буде мати найменшу ефективність при значеннях параметру α близьких за модулем до значення адитивної складової похибки, але з протилежним знаком, тобто коли $\alpha = -\Delta/M_x$;

- при значенні $\gamma < \Delta/(x_n \cdot \beta - \Delta)$ доцільно використовувати адитивний цикл деформації (виконувати обидва етапи), а в іншому випадку використовувати мультиплікативний цикл деформації (виконувати тільки перший етап);

- при нормальному та арксинусоїдальному законі розподілу буде спостерігатися двопараметрове граничне обмеження. Якщо виконується нерівність $\gamma_A < \gamma < \gamma_B$ (рис. 5), то необхідно виконувати адитивний цикл деформації, при невиконанні нерівності – мультиплікативний.

Слід зауважити, що в даному випадку розглянуто варіант, коли допоміжні величини формуються без похибки. Але це з практичної точки зору не можливо. Тому слід провести дослідження та визначити, яким чином зміняться критерії вибору циклу, якщо допоміжні величини будуть формуватися з деякою похибкою Δ_0 [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Яцук В.О., Малачівський П.С. Методи підвищення точності вимірювань: підручник/ «Бескід Біт» 2008. – 368 с.
2. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю /Володарський Є.Т., Кухарчук В.В., Поджаренко В.О, Сердюк Г.Б. – Вінниця: Велес, 2001.-219 с.
3. Чернецький Є.В., Черненко І.М., Мисов О.П.. Метод зменшення викидів забруднювальних речовин в атмосферу за рахунок підвищення вірогідності контролю вмісту O_2 // Вопросы химии и химической технологии. – 2010. – № 1. – С. 63-67.
4. Володарський Є.В., Кошева Л.О., Чернецький Є.В.. Підвищення вірогідності контролю за рахунок деформації характеристики перетворення вимірювального каналу// Вісник Хмельницького національного університету. – Частина 1. Том 1. – 2005 – №4. – С. 212-216.