

УДК 624.04

Д.Г. Зеленцов, А.А. Радуль

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ОДНОКОНТУРНЫМИ СВЯЗЯМИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВЕСОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОРРОДИРУЮЩИХ БАЛОК

Аннотация. В статье рассмотрена двухконтурная математическая модель решения задачи весовой оптимизации корродирующих балочных конструкций и модель с двумя последовательными одноконтурными связями, показаны преимущества последней. Получено аналитическое решение задачи весовой оптимизации балки прямоугольного сечения для второй модели, что позволило точно определить значения весовых коэффициентов для обобщенной целевой функции. Приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие возможности использования модели с двумя последовательными одноконтурными связями при правильном выборе весовых коэффициентов и критерия оптимальности.

Введение

Актуальность весовой оптимизации корродирующих балок обусловлена их широким применением в качестве конструктивных элементов в промышленных машинах и аппаратах, работающих в условиях действия сильноагрессивных сред (растворов неорганических и органических кислот, солей, щелочей, влажных газов и паров). Например, опорные элементы тарелок ректификационных колон предприятий химической и нефтеперерабатывающей промышленности, или опоры мешалок в дефикационных аппаратах сахарных заводов. В то же время, недостаточная изученность процессов коррозии под напряжением приводит к тому, что для компенсации коррозионных потерь при проектировании машин и агрегатов предусматривается запас толщины, в результате чего непродуктивно затрачивается до 20% металла. Поэтому, представляет интерес определение точной формы и размеров сечения балки, обеспечивающих заданную долговечность и эксплуатационную надежность при минимальном весе конструкции.

© Зеленцов Д.Г., Радуль А.А., 2009

Постановка задачи

При решении задачи весовой оптимизации балок, подверженных коррозионному износу, в ряде работ предлагается двухконтурная модель (далее – модель 1), изображенная на рис. 1.

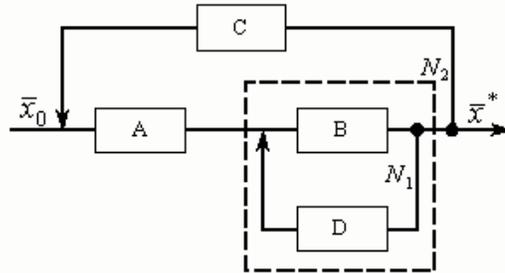


Рисунок 1 - Двухконтурная модель (модель 1)

Где А – модуль вычисления целевой функции; В – модуль вычисления функции ограничений; С – модуль решения задачи нелинейного программирования; D – модуль пересчета геометрических параметров; \bar{x}_0 – вектор входных параметров (параметры конструкции, агрессивность среды, срок эксплуатации); \bar{x}^* – вектор выходных параметров (оптимальные параметры конструкции).

Как задача нелинейного математического программирования эта постановка может быть сформулирована в виде:

$$\begin{cases} A(\bar{x}) \rightarrow \min \\ [\sigma] - \frac{M_y^{\max}}{I(\bar{x}, t^*)} \geq 0 \\ x_i^- \leq x_i \leq x_i^+ \end{cases} \quad (1)$$

В качестве математической модели коррозионного износа была принята модель [1], учитывающая влияние напряженно-деформированного состояния на скорость коррозии, где v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; k – коэффициент, учитывающий влияние напряжений на скорость коррозии; $\sigma(t)$ – напряжение, как функция времени.

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 (1 + k\sigma(t)) \quad (2)$$

Двухконтурная модель неудобна по нескольким причинам. Второй контур, который учитывает влияние напряжений на скорость коррозионного процесса, приводит к значительному увеличению количества итераций, так как в нем численно решается задача Коши

на каждом шаге вычисления функции ограничений. Кроме того, увеличивается погрешность решения задачи оптимизации, а при расчете статически неопределимых систем, когда в функции ограничений необходимо численно решать систему уравнений метода конечных элементов, погрешности вообще становятся неконтролируемыми.

При решении ряда задач возможен переход к модели с последовательными одноконтурными связями (далее – модель 2), когда сначала находится оптимальный проект в момент разрушения конструкции без учета коррозионного износа, а затем производится наращивание жертвенного слоя на оптимальный проект исходя из заданной скорости коррозии и срока эксплуатации (рис. 2).

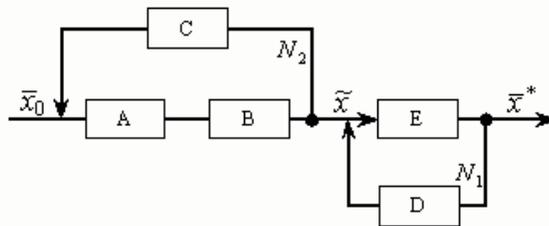


Рисунок 2 - Модель с последовательными одноконтурными связями (модель 2)

В модели 2 появляется модуль E – модуль пересчета оптимальных параметров; \tilde{x} – вектор оптимальных параметров для нейтральной среды.

Как задача нелинейного математического программирования постановка может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \omega \cdot P + (1 - \omega) \cdot A \rightarrow \min \\ [\sigma] - \frac{M_y^{\max}}{I(\bar{x})} \geq 0 \\ x_i^- \leq x_i \leq x_i^+ \end{cases} \quad (3)$$

где ω – весовой коэффициент, зависящий от обобщенного параметра агрессивности среды $\nu_0 t$; P – периметр сечения; A – площадь сечения.

В модели 2 решение задачи Коши осуществляется только один раз при пересчете оптимальных параметров конструкции в соответствии со степенью агрессивности среды, что значительно повышает ее эффективность. Более того, разделение модулей вычисления функции ограничений и моделирования коррозионного

процесса позволяет контролировать погрешности численных процедур в каждом из них и повышать точность получаемых решений.

При переходе от модели 1 к модели 2 необходимо учитывать влияние периметра поперечного сечения. В ряде работ для учета периметра сечения предлагается изменять критерий оптимальности, т.е. включать периметр в целевую функцию наряду с площадью сечения, при этом вводится весовой коэффициент, значение которого и определяет степень влияния периметра. Оптимальные проекты, полученные при различных постановках, будут совпадать лишь при правильном выборе весовых коэффициентов [2, 3]. Однако, в этих работах значения весовых коэффициентов, позволяющих осуществить корректный переход от модели 1 к модели 2, получены численно, что затрудняет быстрое и точное их вычисление.

В настоящей работе предлагается подход к определению весовых коэффициентов, основанный на аналитическом решении поставленной задачи. Такой подход, с точки зрения авторов, с одной стороны, более корректен, с другой позволяет подтвердить достоверность полученных в [2, 3] результатов.

Получение аналитического решения для балки прямоугольного сечения

В качестве модельной конструкции рассматривается статически определимая балка прямоугольного сечения с высотой h и шириной b , подверженная коррозионному износу, который описывается моделью (2). Предполагается, что известно положение опасного сечения и значение изгибающего момента M .

Сначала найдем решение задачи при отсутствии агрессивной среды ($t^* = 0$):

$$\begin{cases} 2\omega(b+h) + (1-\omega)bh \rightarrow \min. \\ [\sigma] - \frac{6M}{bh^2} \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

В результате решения задачи (4) получим параметрическое семейство решений, зависящих от параметра ω .

Так как решение задачи возможно только на границе допустимой области, преобразуем двумерную задачу оптимизации в одномерную, используя ограничение и считая его активным. Принимая во внимание то, что осевой момент сопротивления определяется из условия прочности для случая чистого изгиба,

выражаем ширину сечения через его высоту и осевой момент сопротивления:

$$W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow b = \frac{6W}{h^2}. \quad (5)$$

После подстановки значений b в выражение (4) целевая функция приобретает вид:

$$2\omega \left(\frac{6W}{h^2} + h \right) + (1 - \omega) \frac{6W}{h} \rightarrow \min. \quad (6)$$

Чтобы определить минимум целевой функции приравняется нулю ее первая производная, которая после несложных математических преобразований имеет вид:

$$\omega h^3 - 3W(1 - \omega)h - 12\omega W = 0. \quad (7)$$

Полученное уравнение решается точно с использованием формул Кардано относительно h . Таким образом, в отличие от результатов полученных в [2], в данном случае отсутствует погрешность решения задачи (4). При значениях весового коэффициента $\omega \in [0;1]$ получаем аналитическое решение задачи весовой оптимизации в виде множества $h_i \times b_i$, зависящих от весового коэффициента и удовлетворяющих условию прочности балки в момент разрушения $W(h_i; b_i) = \frac{M}{[\sigma]} = \text{const}$.

Далее для каждой пары $h_i \times b_i$ был смоделирован процесс коррозионного износа при заданных скорости коррозии v_0 и сроке эксплуатации t^* . В дальнейшем в работе используется обобщенный параметр $\delta_0 = v_0 t^*$, представляющий собой степень агрессивности среды. Результаты моделирования приведены в табл. 1.

Анализ результатов, приведенных в табл. 1 и на рис. 3, позволяет сделать вывод о том, что минимумом площади поперечного сечения в начальный момент времени обладают балки с определенным отношением высоты к ширине (весовой коэффициент ω). Причем весовой коэффициент увеличивается с увеличением обобщенного показателя скорости коррозии $v_0 t^*$.

Таблица 1

Значения площади поперечного сечения балки при различных значениях обобщенного параметра $\nu_0 t^*$ и весового коэффициента ω

$\omega \backslash \nu_0 t^*$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,05	2,15	6,34	10,75	19,04	27,16	35,28	43,44	51,67	59,97	68,36	76,84	85,41
0,10	2,01	5,49	8,94	15,18	21,14	27,04	32,93	38,85	44,82	50,86	56,96	63,14
0,15	1,97	5,14	8,20	13,61	18,71	23,72	28,70	33,70	38,74	43,83	48,97	54,18
0,20	1,96	4,95	7,78	12,72	17,34	21,85	26,33	30,82	35,34	39,91	44,52	49,20
0,25	1,98	4,84	7,51	12,15	16,46	20,65	24,80	28,96	33,15	37,38	41,65	45,99
0,30	2,02	4,77	7,34	11,75	15,84	19,80	23,73	27,66	31,62	35,61	39,65	43,75
0,35	2,08	4,74	7,22	11,47	15,39	19,19	22,95	26,71	30,49	34,31	38,18	42,10
0,40	2,15	4,73	7,14	11,26	15,05	18,73	22,36	25,99	29,64	33,33	37,06	40,85
0,45	2,24	4,74	7,10	11,11	14,80	18,37	21,90	25,43	28,98	32,57	36,20	39,88
0,50	2,34	4,77	7,08	11,01	14,62	18,11	21,55	25,00	28,47	31,97	35,52	39,12
0,55	2,46	4,82	7,09	10,94	14,48	17,90	21,28	24,66	28,06	31,50	34,98	38,51
0,60	2,58	4,88	7,10	10,90	14,38	17,75	21,07	24,40	27,74	31,12	34,55	38,03
0,65	2,71	4,95	7,13	10,88	14,31	17,64	20,92	24,20	27,50	30,83	34,21	37,64
0,70	2,85	5,03	7,18	10,89	14,28	17,56	20,80	24,04	27,30	30,60	33,94	37,33
0,75	2,99	5,12	7,24	10,90	14,26	17,51	20,72	23,93	27,16	30,42	33,73	37,09
0,80	3,13	5,21	7,30	10,93	14,27	17,48	20,66	23,84	27,05	30,28	33,56	36,90
0,85	3,28	5,31	7,38	10,97	14,28	17,47	20,63	23,79	26,97	30,18	33,44	36,75
0,90	3,43	5,42	7,46	11,02	14,31	17,48	20,62	23,76	26,92	30,11	33,35	36,64
0,95	3,58	5,53	7,55	11,08	14,35	17,51	20,63	23,75	26,89	30,07	33,29	36,56
1,00	3,73	5,64	7,64	11,15	14,40	17,54	20,65	23,76	26,88	30,04	33,25	36,50

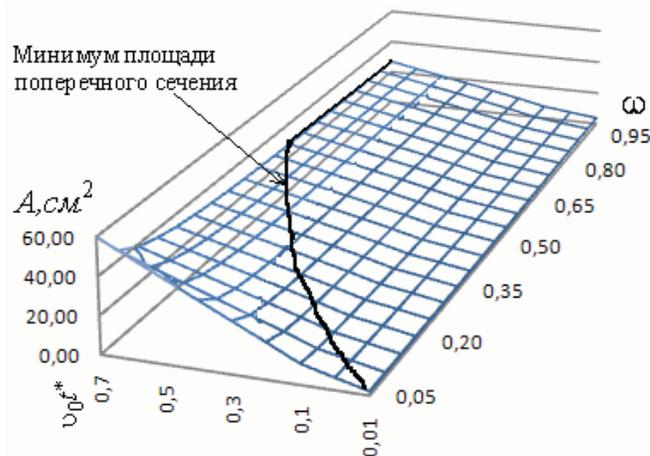


Рисунок 3 - Зависимость площади поперечного сечения от параметров $\nu_0 t^*$ и ω

Задача (4) решалась для балок с моментами сопротивления в пределах от 20 до 2000 см³. Оказалось, что значения весовых коэффициентов зависят только от скорости коррозии, поэтому после статистической обработки данных была предложена эмпирическая формула для нахождения весового коэффициента:

$$\omega = -0,3(v_0 t)^2 + 0,77 v_0 t + 0,03. \quad (8)$$

Численная иллюстрация

Численный эксперимент проводился для балки постоянной жесткости со следующими параметрами: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 240$ МПа. Параметры агрессивной среды: $k = 0,003$ МПа⁻¹; $0,01 \leq v_0 \leq 1$ см/год. Расчетная схема балки приведена на рис. 4. На участке балки ВС имеет место чистый изгиб.

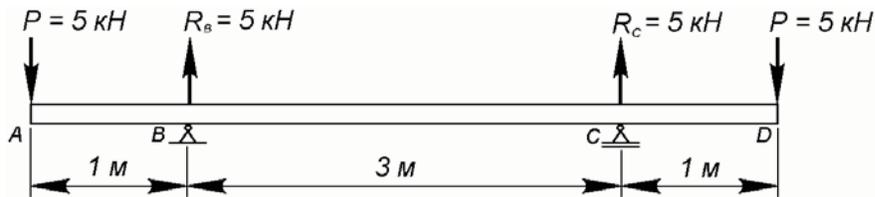


Рисунок 4 - Расчетная схема

Анализ результатов численного эксперимента показал, что при определенном значении весового коэффициента площадь сечения минимальна. Значения весовых коэффициентов, при которых площадь сечения балки принимает минимальное значение приведена в табл. 2.

Таблица 2

Значения весового коэффициента и площади поперечного сечения балки при различных значениях скорости коррозии

$v_0 t$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ω	0,052	0,112	0,185	0,248	0,299	0,341	0,375	0,408	0,434	0,458	0,478
h , см	34,60 (34,22)	24,23 (23,72)	16,87 (18,26)	15,18 (15,31)	13,99 (14,19)	13,12 (12,85)	13,36 (12,93)	12,71 (12,61)	12,22 (12,47)	12,46 (12,52)	12,08 (13,00)
b , см	0,13 (0,14)	0,49 (0,50)	1,01 (0,93)	1,40 (1,39)	1,80 (1,78)	2,21 (2,25)	2,44 (2,52)	2,85 (2,87)	3,26 (3,19)	3,48 (3,46)	3,89 (3,62)
A , см ²	4,64 (4,79)	11,80 (11,79)	17,03 (16,99)	21,31 (21,29)	25,23 (25,21)	28,97 (28,96)	32,62 (32,57)	36,20 (36,16)	39,80 (39,74)	43,39 (43,34)	47,03 (47,04)

В табл. 2 приведены численные результаты решения задачи весовой оптимизации корродирующей балки прямоугольного сечения (рис. 4), полученные с помощью модели 2. В скобках приведены результаты решения той же задачи, но с помощью модели 1.

Расхождения результатов не превышают 0,2%, что подтверждает их достоверность.

Выводы

Совпадение результатов, полученных при аналитическом решении задачи (4) с результатами, приведенными в [2], полностью подтверждает сформулированное в [2] утверждение о возможности использования модели с двумя последовательными одноконтурными связями при правильном выборе весовых коэффициентов и критерия оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии / В.М. Долинский // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1967. – №2. – С. 9-10.

2. Зеленцов Д.Г. Исследование влияния периметра на оптимальные параметры сечений корродирующих изгибаемых стержневых элементов / Д.Г. Зеленцов, Т.Ю. Ускова // Вопр. химии и хим. технологии. – 2004. – №6. – С. 119-122.

3. Зеленцов Д.Г. Новые модели решения задач весовой оптимизации корродирующих изгибаемых стержневых элементов / Зеленцов Д.Г., Ускова Т.Ю. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1 (42). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 23-32.