УДК 539.3

К.І. Шнеренко, В.Ф. Годзула

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ З ОТВОРОМ ПІД ДІЄЮ КОМБІНОВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

1. Постановка задачі. Розглянемо напружено - деформований стан циліндричної оболонки із композитного матеріалу радіуса R, товщини h. Оболонка послаблена круговим отвором радіуса r_0 і навантажена внутрішнім тиском інтенсивності p_0 та осьовим навантаженням інтенсивності q. Вважаємо, що в оболонці виникають пружні деформації, а композитний матеріал ортотропний. Для всього пакету оболонки можуть бути знайдені приведені жорсткісні характеристики відносно розтягу – стиску, згину, кручення і міжшарового зсуву.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до полярної напівгеодезичної системи координат (ρ, θ) з початком в центрі отвору. При цьому параметри Ламе і кривизни оболонки запишемо в вигляді

$$A = 1,\ B = \rho,\ k_1 = \frac{1-\cos 2\theta}{2R},\ k_2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2R},\ k_{12} = -\frac{\sin 2\theta}{2R}. \qquad (1)$$

Однорідна система рівнянь рівноваги непологої оболонки в зусиллях в обраній системі координат і з врахуванням (1) запишеться у вигляді [1]

$$\frac{\partial T_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}(T_\rho - T_\theta) + \frac{\sin^2\theta}{R}Q_\rho + \frac{\sin 2\theta}{2R}Q_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho}S_{\rho\theta} + \frac{\sin 2\theta}{2R}Q_\rho + \frac{\cos^2\theta}{R}Q_\theta = 0,$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{R}T_\rho - \frac{\sin 2\theta}{R}S_{\rho\theta} - \frac{\cos^2\theta}{R}T_\theta + \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}Q_\rho = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}(G_\rho - G_\theta) - Q_\rho = 0,\ \ \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho}H_{\rho\theta} - Q_\theta = 0.$$

Геометричні співвідношення між деформаціями, змінами кривизн і узагальненими переміщеннями будуть

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin^2\theta}{R} w,\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} + \frac{\cos^2\theta}{R} w,\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\rho} + \frac{\sin 2\theta}{R} w,$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_\rho + \frac{\partial w}{\partial \rho},\ \varepsilon_{23} = \gamma_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta},\ \chi_1 = \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho},\ \chi_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\gamma_\rho}{\rho}, \qquad (3)$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \rho} - \frac{\gamma_\theta}{\rho}.$$

Співвідношення пружності для ортотропного матеріалу оболонки подамо в вигляді [1]

$$T_i = B_{1i}\varepsilon_1 + B_{2i}\varepsilon_2 + B_{3i}\varepsilon_{12}, \qquad G_i = D_{1i}\chi_1 + D_{2i}\chi_2 + D_{3i}2\chi_{12,} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$Q_i = K_i\varepsilon_{13} \qquad (i = 1,2), \qquad (4)$$

де $B_{ji}, D_{ji,} K_i$ узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Основний напружений стан, що виникає в непослабленій отвором оболонці, визначається за безмоментною теорією [1].

Збурений напружений стан для непологої оболонки, що породжується наявністю отвору, знаходиться з рівнянь загальної теорії оболонок [1].

Граничні умови на контурі отвору при $\rho = \rho_0$ мають вигляд

$$T_\rho = -p_0 R + \left(\frac{1}{4} p_0 R \mp \frac{q}{4\pi R}\right)\left(1 + \cos 2\theta\right), S_{\rho\theta} = -\left(\frac{1}{4} p_0 R \mp \frac{q}{4\pi R}\right)\sin 2\theta, \qquad (5)$$

$$G_\rho = 0, \qquad H_{\rho\theta} = 0, \qquad Q_\rho = \frac{p_0 r_0}{2}.$$

У випадку $p_0 = 0$ отримуємо задачу для оболонки, навантаженої осьовим розтягом –стиском; при q=0 – відповідно для оболонки під дією внутрішнього тиску.

2. Метод розв'язку задачі. Будемо виходити з застосування варіаційно-різницевого методу [2, 5, 6]. Згідно принципу можливих переміщень Лагранжа достовірні переміщення перетворюють функцію Лагранжа $\prod$ в відносний мінімум

$$\delta \prod = 0, \qquad (6)$$

що еквівалентно рівності нулю всіх частинних похідних по незалежних змінних. Тут $\prod = V - A$, V - потенціальна енергія деформації, A - сума робіт зовнішніх сил на незалежних переміщеннях оболонки.

 ISSN 1562-9945

Потенційну енергію запишемо через пружний потенціал Φ [3]

$$V = \int_G \Phi dG, \tag{7}$$

де G - область, яку займає серединна поверхня оболонки.

Геометричні співвідношення (3) подамо в компактному вигляді

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{15} N_{ik} U_k, \tag{8}$$

де $U_k \left(k = \overline{1,15}\right)$ – деякі узагальнені переміщення, а компоненти матриці $N_{ik} \left(i = \overline{1,8};\, k = \overline{1,15}\right)$ знаходяться з (3). Тут незалежних узагальнених переміщень лише п'ять:

$$U_l \left(l = 1,4,7,10,13\right); \quad \left(U_1 = u, U_4 = v, U_7 = w, \quad U_{10} = \gamma_\rho, \quad U_{13} = \gamma_\theta\right),$$

а решта пов'язані з ними залежностями:

$$U_{l+1} = \frac{\partial U_l}{\partial \alpha}; \quad U_{l+2} = \frac{\partial U_l}{\partial \beta} \qquad \left(l = 1,4,7,10,13\right).$$

Після підстановки (8) в вираз для пружного потенціалу Φ [4] отримаємо

$$\Phi = \sum_{k=1}^{15} \left(\sum_{r=1}^{15} P_{kr} U_r - R_k \right) U_k, \tag{9}$$

де P_{kr} і R_k залежать від N_{jk} [2].

Варіаційну задачу для відносних зміщень замінимо варіаційною задачею для дискретних їх значень у вузлах основної та допоміжної сіток однакової розмірності. Вузли основної сітки позначаються цілими індексами (s,t), а допоміжної, що лежать посередині між вузлами основної, – дробовими індексами $(s+\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2})$. Вузли перетину обох сіток позначаються змішаними індексами $(s+\frac{1}{2}, t)$ и $(s, t+\frac{1}{2})$. Основна сітка по координаті ρ має крок $\lambda_\rho(s)$ $\left(s = \overline{1,m}\right)$, а по координаті θ - $\lambda_\theta(t)$ $\left(t = \overline{1,n}\right)$. Тут m - кількість вузлів сітки по координаті ρ, n – по координаті θ.

Таким чином, отримуємо дискретний аналог функції Лагранжа Π. Поверхневий інтеграл в (7) поданий в вигляді подвійної суми [4]

$$V = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} \Phi^{st} G^{st}, \tag{10}$$

де $\Phi^{st} = \Phi(\rho_s, \theta_t)$ − значення пружного потенціалу в точці (ρ_s, θ_t); G^{st} − вагова функція, що являє собою частину площі чотирикутної ячейки з центром в точці (ρ_s, θ_t) і сторонами

$$\frac{1}{2}\left[\lambda_\rho(s-1) + \lambda_\rho(s)\right]; \qquad \frac{1}{2}\left[\lambda_\theta(t-1) + \lambda_\theta(t)\right],$$

які належать області S.

З умов (6) отримуємо систему лінійних рівнянь відносно дискретних значень переміщень серединної поверхні і функцій зсуву U_l (l =1,4,7,10,13) [4]

$$\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1} \sum_{k=1}^{13} P_{kl}^{ab} U_k^{ab} = Q_l^{ij} \qquad \left(l, k = 1, 4, 7, 10, 13; \quad i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}\right). \tag{11}$$

Тут P_{kl}^{ab} − значення коефіцієнтів в вузлі a, b при відомій величині U_k^{ab} в рівнянні для U_l^{ij}, який є функцією геометричних і механічних параметрів оболонки; Q_l^{ij} − значення в вузлі (i, j) l -х компонент силового навантаження[2]. Матриця системи рівнянь (11) симетрична, додатньо визначена, і має стрічкову структуру, що дозволяє скоротити обсяг використованої пам'яті при розрахунках на ЕОМ.

3. Числові результати. Розглянемо рівновагу циліндричної оболонки з круговим отвором. При розрахунках розглядались такі параметри оболонки і матеріалу:

$$R/h = 100; \quad r_0/r = 11; \quad E_2/E_1 = 0,23; \quad \nu_1 = 0,27;$$

$$G_{12}/E_1 = 0,09; \quad . \quad G_{13}/E_1 = G_{23}/E_1 = 0,07.$$

В таблицях 1, 2 наведені значення коефіцієнтів концентрації напружень $k_{1\theta} = T_\theta / p$, $k_{2\theta} = 6G_\theta / ph$ $\left(p = p_0 R \pm q / 2\pi R\right)$ по контуру непідкріпленого отвору.

В таблиці 1 представлені результати для оболонки, навантаженої внутрішнім тиском (q=0), а в таблиці 2 − відповідно для випадку осьового розтягу ($p_0 = 0$).

 ISSN 1562-9945

Зауважимо, що наведена методика дозволяє розглядати сумісну дію внутрішнього тиску і розтягу, або стиску по осі оболонки при різних значеннях p_0 та q.

Таблиця 1

θ / К	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$
K_θ^T	7,64	6,31	4,72	2,21	-1,84
K_θ^G	-2,41	-1,27	0,87	3,01	5,34

Таблиця 2

θ / К	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$
K_θ^T	-0,62	-0,24	0,62	2,23	5,04
K_θ^G	0,22	0,16	0,49	0,03	-0,23

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С ., Чехов ВАЛ.Н., Чехов Вик.Н.,Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Т.1:Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями..-Киев.:Наук.думка, 1980.-636 с.
2. Годзула В.Ф., Гузь А.Н., Шнеренко К.И. К задачам статики непологих анизотропных оболочек с отверстиями // Прикл.механика.-1988.-Т.24,№9.-С.22-30.
3. Godzula V.F., Shnerenko K.I. The stress-strain State of a Composite Spherical Shell with Two Polar Openings// Int.Appl. Mech.-2002.-38,№3.-P.341-344.
4. Shnerenko K.I., Godzula V.F. Stress state of a Composite Cylindrical Shell with Sizeable Circular Hole// Int.Appl.Mech.-2003.-39,№11.-P.1323-1327.
5. Шнеренко К.І., Годзула В.Ф., Богатирчук А.С. Визначення концентрації напружень навколо отвору в циліндричній панелі із композитного матеріалу // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 5 (46). Дніпропетровськ, 2006, с. 121 – 123.
6. Шнеренко К.І., Годзула В.Ф. Дослідження впливу зміни міжшарового зсуву на напружений стан композитної циліндричної оболонки з отвором // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008, с. 111 – 115.

Одержано 02.02.2009р.