

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ, СЖАТЫХ ОСЕВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

Введение. Тонкостенные трубчатые валы являются одним из основных конструктивных элементов современного авиа- и энергомашиностроения. В процессе функционирования угловая скорость их вращения может достигать 30000 об/мин. Генерируемые этим вращением центробежные силы инерции приводят не только к возникновению интенсивных полей напряжений в этих валах, но могут быть также и причиной их бифуркационного квазистатического выпучивания. Проблемами исследования устойчивости вращающихся валов при различных схемах их опирания посвящена обширная литература. Постановки задач об их устойчивости, методика исследования и обзор научной литературы по этим вопросам можно найти в публикациях [1-6]. В работах [1,2] рассматриваются задачи бифуркационного выпучивания валов с учетом их сжатия или растяжения осевой силой. При этом предполагается, что эти силы являются “мертвыми” (неследящими) (рис.1,а) и поэтому в валах реализуется эйлерова потеря устойчивости.

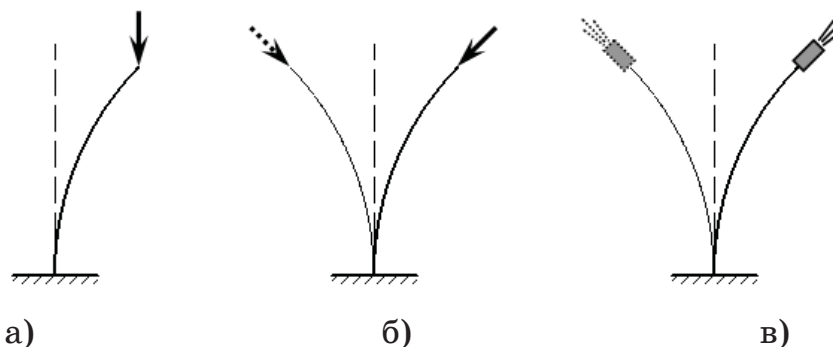


Рисунок 1

В работах [3-6] обращено внимание на характер действия осевых сил на стержневые системы. В них показано, что если сила, приложенная к свободному концу консольного стержня, является

следящей (рис.1,б,в), то его потеря устойчивости может быть реализована только посредством перехода в неустойчивое колебательное движение. Системы такого вида относятся к классу неконсервативных.

Задача исследования поведения тонкостенного вала существенно усложняется, если он вращается и подвергается действию следящих осевых нагрузок одновременно. В этом случае в зависимости от соотношения между силами инерции вращения и осевыми нагрузками могут быть реализованы как статическая, так и динамическая формы потери устойчивости. При этом важным остается вопрос выбора модели вращающегося тонкостенного вала. В зависимости от диаметра, толщины и длины вала моделирование его поведения может быть осуществлено как с помощью теории стержней, так и теории тонких оболочек.

Целью данной работы является численное исследование статических и динамических критических состояний тонкостенных консольных вращающихся валов, нагруженных осевой следящей силой. Поставленная задача решается с помощью моделей теории стержней и теории тонких оболочек.

Модель теории вращающихся балок. Пусть упругий стержень, напряженный продольной силой T , вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг своей продольной оси. Сформулируем уравнения его движения. Для этого введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке стержня и вращающуюся вместе с ним систему координат $Oxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В исходном недеформированном состоянии оси OZ, Oz совпадают с продольной осью стержня. Будем исследовать колебания стержня во вращающейся системе координат $Oxyz$. Примем, что упругие перемещения его элементов вдоль осей Ox и Oy составляют u и v , перемещениями вдоль оси Oz будем пренебрегать.

Для описания динамического равновесия стержня используем принцип Даламбера в форме уравнений изгиба в плоскостях xOz и yOz .

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Здесь M_x, M_y – внутренние моменты в рассматриваемом сечении стержня, действующие относительно осей, проходящих через центр

сечения параллельно осям Ox и Oy ; q_x и q_y – интенсивности сил инерции, направленных параллельно соответствующим осям.

Поскольку стержень преднапряжен продольной силой T , вызывающей в нём дополнительные изгибающие моменты при его деформировании, для внутренних изгибающих моментов используются формулы

$$M_x = EI \frac{d^2v}{dz^2} - Tv, \quad M_y = EI \frac{d^2u}{dz^2} - Tu. \quad (2)$$

Здесь вторые слагаемые в правых частях определяют дополнительные изгибающие моменты, обусловленные эксцентриситетом продольной растягивающей силы T при деформировании стержня.

Для вычисления составляющих q_x и q_y поперечной распределенной нагрузки на стержень необходимо учитывать, что ее роль играют силы инерции, вызванные вращением стержня и его упругими колебаниями. Потому вектор \vec{q} этой нагрузки находится с помощью равенства

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала стержня, F – площадь его поперечного сечения, \vec{a} – абсолютное ускорение рассматриваемого элемента. При подсчете вектора \vec{q} учтем, что механическое поведение стержня рассматривается во вращающейся системе координат $Oxyz$, в связи с этим движение каждого его элемента является сложным. В этом случае его абсолютное ускорение \vec{a} подсчитывается по формуле Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad (4)$$

где \vec{a}^e , \vec{a}^r , \vec{a}^c – векторы переносного, относительного и кориолисова ускорения.

Выполнив соответствующие векторные операции, получим составляющие вектора сил инерции

$$\begin{aligned} q_x &= -\rho F \left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2} \right), \\ q_y &= -\rho F \left(-\omega^2 v + 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

После перехода от обыкновенных производных к частным на основе соотношений (1), (2), (5) строятся уравнения колебаний

вращающегося стержня, напряженного продольной силой T

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью этой системы можно исследовать динамическую потерю устойчивости во вращающемся стержне. Отметим, что, несмотря на ее линейность, она обладает довольно сложной структурой, обусловленной наличием слагаемых вида $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$, $+2\rho F \omega \partial u / \partial t$ в первом и втором уравнениях. Отмеченное усложнение системы (6) указанными членами связано с тем, что они содержат нечетные производные по t , а коэффициенты перед этими слагаемыми образуют кососимметричные матрицы.

При консольном опирании балки на краях $Z = 0$ и $Z = L$ реализуются краевые условия

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=0} &= 0, \\ \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=L} = \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=L} &= 0, \quad \left. \frac{d^3 u}{dz^3} \right|_{z=L} = \left. \frac{d^3 v}{dz^3} \right|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Заменой $u = U_s(z) \sin ct$, $v = V_c(z) \cos ct$ система дифференциальных уравнений (6) с частными производными преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_s}{dz^4} - T \frac{d^2 U_s}{dz^2} - \rho F \omega^2 U_s + 2\rho F \omega c V_c - \rho F c^2 U_s &= 0, \\ EI \frac{d^4 V_c}{dz^4} - T \frac{d^2 V_c}{dz^2} - \rho F \omega^2 V_c + 2\rho F \omega c U_s - \rho F c^2 V_c &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

которая решается методом Рунге-Кутта с применением процедуры ортогонализации по Годунову.

Модель теории вращающихся тонких оболочек. Будем считать, что тонкостенная труба представляет собой цилиндрическую оболочку, жестко связанную с носителем, который вращается с постоянной по модулю угловой скоростью $\vec{\omega}$ вместе с системой координат $Oxyz$ относительно оси симметрии Oz (рис.2). Введем правые системы координат: $OX^*Y^*Z^*$ – инерционная система координат с началом в центре опорного контура оболочки, ось OZ^*

совпадает с осью Oz . На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат $Ox^1x^2x^3$, у которой координатная линия x^1 лежит в образующем сечении, x^2 направленная в круговом направлении, x^3 – вдоль направления внутренней нормали к поверхности оболочки.

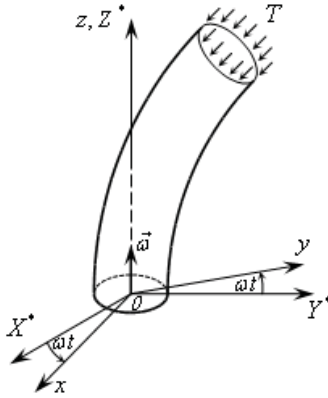


Рисунок 2

Уравнения динамического равновесия элемента оболочки, записанные в криволинейной ортогональной системе координат $Ox^1x^2x^3$ с базисными векторами \vec{e}_α на поверхности, имеют вид [7,8]

$$\nabla_\alpha \vec{T}^\alpha + \vec{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \vec{M}^\alpha + (e_\alpha \times \vec{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (9)$$

Здесь \vec{T}^α – вектор внутренних сил в оболочке, \vec{M}^α – вектор внутренних моментов, a_{11} , a_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, \vec{p} – вектор интенсивности внешней распределенной нагрузки.

Используя соотношение связи между контравариантными компонентами функций внутренних сил T^{ij} и моментов M^{ij} и ковариантными составляющими функций деформации ε_{ij} и изменения кривизн μ_{ij}

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh \varepsilon_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / (1-\nu^2), \\ M^{ij} &= Eh^3 \mu_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / 12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (10)$$

выразив эти функции через ковариантные компоненты u_1 , u_2 , u_3 вектора перемещений \vec{u} и угла поворота \mathcal{G}_i сечения, получаем расчетные уравнения устойчивости.

В данной работе изучаются критические состояния вала, реализуемые по первой гармонике окружной координаты, являющейся наименее энергоемкой. Поэтому будем

аппроксимировать искомые переменные базисными функциями $\sin(ct+x^2)$, $\cos(ct+x^2)$ с фазовой координатой $ct+x^2$, где c – частота свободных колебаний [7]. Тогда с учетом этого упрощения из (9), (10) можно получить уравнения свободных колебаний

$$\begin{aligned} dT^{(11)}/dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\ - \gamma h[-\omega^2 \mathcal{G}_{(1)} r/a_{11} - c^2 u_{(1)}/a_{11}] = 0; \\ dT^{(12)}/dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} + T_0^{(11)} d^2 u_{(2)}/(dx^1)^2 - b_2^2 T^{(23)} - \\ - \gamma h[-\omega^2 \mathcal{G}_{(2)} r/a_{22} - 2\omega c u_{(3)}/\sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)}/a_{22} - \omega^2 u_{(2)}/a_{22}] = 0; \quad (11) \\ dT^{(13)}/dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11}\Delta T^{(11)} - \mu_{(11)}T_0^{(11)} + b_{(22)}T^{(22)} - \\ - \mu_{(22)}T_0^{(22)} - \gamma h[-2\omega c u_{(2)}/\sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что свободные колебания, описанные этой системой, имеют вид гармонической волны, бегущей в направлении вращения с угловой скоростью c . Причем, если при $\omega=0$ частоты являются кратными, а волны стоячими, то при $\omega \neq 0$ кратные частоты расщепляются на две и их моды начинают прецессировать в разных направлениях. Отрицательной частоте c отвечает прецессия в направлении вращения оболочки (прямая регулярная прецессия), положительной частоте c – прецессия в противоположном направлении (обратная регулярная прецессия).

Постановка задачи Штурма-Лиувилля и методика ее решения. Приведем системы (8) и (11) к системе восьми уравнений первого порядка

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = Q_1 \bar{y} + T Q_2 \bar{y} + \omega^2 Q_3 \bar{y}. \quad (12)$$

Здесь $\bar{y}(z)$ – восьмимерная искомая вектор-функция с компонентами $y_1 = u$, $y_2 = \frac{du}{dz}$, $y_3 = \frac{d^2 u}{dz^2}$, $y_4 = \frac{d^3 u}{dz^3}$, $y_5 = v$, $y_6 = \frac{dv}{dz}$, $y_7 = \frac{d^2 v}{dz^2}$, $y_8 = \frac{d^3 v}{dz^3}$ для теории балок и $y_1 = u_{(1)}$, $y_2 = u_{(2)}$, $y_3 = u_{(3)}$, $y_4 = \mathcal{G}_{(1)}$, $y_5 = \varepsilon_{(11)}$, $y_6 = \varepsilon_{(12)}$, $y_7 = \mu_{(11)}$, $y_8 = T^{(13)}$ для теории оболочек; Q_1 , Q_2 , Q_3 – постоянные матрицы коэффициентов размера 8×8 .

Вектор-функция $\bar{y}(z)$ должна удовлетворять граничным условиям, которые можно представить в виде

$$A_1 \bar{y}(0) = 0, \quad A_2 \bar{y}(L) = 0, \quad (13)$$

где A_1, A_2 – постоянные матрицы размера 4×8 .

Общее решение системы (12) при заданных T, ω представляется в форме Коши

$$\bar{y}(z) = Y(z) \bar{C}, \quad (14)$$

где $Y(z)$ – матрица Коши размера 8×8 решений системы (18) с начальными условиями $Y(0)=E$, E – единичная матрица; \bar{C} – искомый постоянный восьмимерный вектор.

При использовании такого подхода вначале при заданных T и ω путем интегрирования системы (12) методом Рунге-Кутты строится матрица $Y(z)$ на отрезке $0 \leq z \leq L$. Затем путем подстановки сформированного с ее помощью решения (14) в условия (13) строится однородная система линейных алгебраических уравнений

$$D\bar{C} = 0. \quad (15)$$

Состояния, в которых матрица D вырождается, являются критическими, поскольку в них система (12), (13) имеет как тривиальное, так и нетривиальные решения. Для определения нетривиального решения, определяющего форму потери устойчивости, одна из компонент вектора \bar{C} задается произвольно, а семь других вычисляются из соответствующим образом усеченной системы (15). В математической физике поставленная краевая задача носит название задачи на собственные значения или задачи Штурма-Лиувилля.

Результаты численного исследования. С помощью разработанного подхода выполнено исследование динамического поведения тонкостенного упругого вала, к свободному концу которого приложена осевая сжимающая следящая сила (рис. 1,б,в). Было принято, что его длина $L=1$ м, толщиной $h=10^{-3}$ м, диаметр срединной поверхности составил $d=0,1$ м. Модуль упругости материала трубы $E=2,1 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Исследования трубы выполнялись с помощью моделей теории балок и теории оболочек.

Отметим, что если консольная тонкостенная труба совершает только вращательные движения и не подвергается действию осевой силы, то с увеличением ее угловой скорости ω может быть

реализована только квазистатическая форма потери устойчивости, при которой происходит ее эйлерово выпучивание во вращающейся системе координат [6,7]. В случае, когда труба подвергается действию только продольной сжимающей следящей силы, возможна только динамическая потеря устойчивости, сопровождаемая ее переходом в режим колебательных движений [6]. Однако если оба вида возмущений консольной трубы реализуются одновременно, то в зависимости от соотношения между их величинами может быть реализовано как первое, так и второе критические состояния. Чтобы установить какое из них наступает раньше, вначале была решена задача о квазистатическом поведении вращающейся трубы, сжатой силой T . При ее решении в уравнениях (8), (11) считалось $c=0$ и при различных значениях ω и T подсчитывался определитель уравнения (15). Значения параметров ω и T , при которых детерминант матрицы D обращался в нуль, считались критическими.

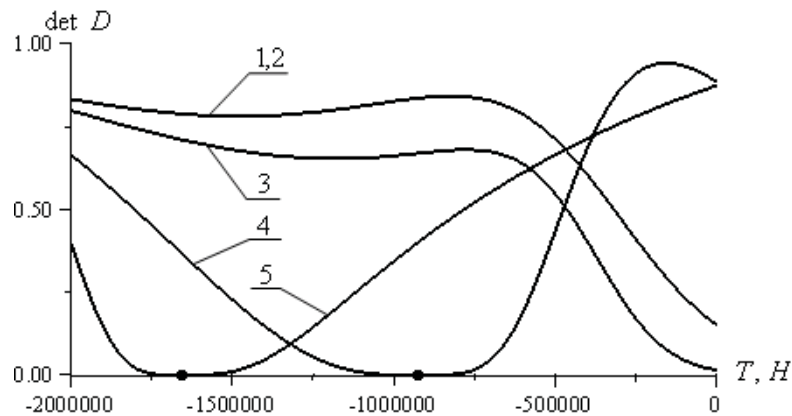


Рисунок 3

Диаграммы изменения величины $\det D$, построенные на основе теории стержней, приведены на рис. 3. Представленные на нем кривые 1-5 соответствуют следующим значениям угловой скорости ω : 1-0; 2-50; 3-500; 4-1000; 5- $\omega=2000$ рад/с. Как следует из приведенных результатов, при $\omega \leq 500$ рад/с определитель матрицы D в нуль не обращается, поэтому статическая потеря устойчивости системы не может быть реализована. Однако с увеличением угловой скорости до $\omega=1000$ рад/с факторы статического выпучивания стержня начинают преобладать над факторами его динамической потери устойчивости и при $\omega=1000$ рад/с, $T=920000$ Н реализуется его дивергентная потеря устойчивости (кривая 4). Если $\omega=2000$ рад/с

(кривая 5), то бифуркационное выпучивание стержня происходит при $T=1660000 \text{ Н}$.

Динамическая потеря устойчивости рассматриваемой системы при действии следящих сил сопровождается переходом в режим колебаний с увеличивающейся амплитудой. В этом случае частоты собственных колебаний становятся комплексными. Мнимые части этих значений соответствуют частоте колебательной потере устойчивости, а действительные части – скорости увеличения их амплитуды. Поэтому в критических состояниях частоты собственных колебаний перестают быть чисто мнимыми. В этом случае на графике зависимости частот от осевой силы T кривые первой и второй частот сливаются. Этот факт является критерием наступления динамической неустойчивости системы [6].

С помощью изложенного подхода с применением моделей трубчатых балок и цилиндрических оболочек выполнен анализ динамического поведения тонкостенных вращающихся консольных валов при значениях угловой скорости ω , рассмотренных выше. Расчеты показали, что найденные по теории балок значения следящей силы T , при которых наступает динамическая потеря устойчивости, не зависят от величины ω . В тоже время эти значения следящей силы T , подсчитанные на основе теории цилиндрических оболочек, отличаются, хотя и незначительно, друг от друга. Поэтому можно отметить, что применение теории оболочек для расчета трубчатых стержней позволяет несколько уточнить критические значения T . Так, при применении модели теории балок критическое значение продольной силы составило $T_{кр}=1,65 \cdot 10^6 \text{ Н}$, для модели теории оболочек оно оказалось равным $T_{кр}=1,40 \cdot 10^6 \text{ Н}$.

На рис.4 показаны зависимости первой и второй собственных частот c_1 , c_2 от значения следящей силы T при разных значениях угловой скорости ω . Жирные сплошные линии соответствуют теории оболочек для случая $\omega=0$. При этом $c_1^+ = -c_1^-$, $c_2^+ = -c_2^-$ и кривые оказались симметричными относительно прямой $c=0$. Это свидетельствует о том, что собственные частоты невращающейся оболочки кратны. Как видно из рисунка, эти кривые не пересекают ось абсцисс, значит квазистатическая потеря устойчивости в исследуемом диапазоне изменения T не наступает, однако поскольку

кривые первой и второй частот соединяются, то можно сделать вывод, в точке их соединения (при $T_{кр}=1,40 \cdot 10^6 \text{ Н}$) наступает динамическая потеря устойчивости. Жирными точками на рис.4 показаны результаты вычислений, выполненных по теории балок при $\omega=0 \text{ с}^{-1}$. В этом случае $c_1^+ = c_1^-$, $c_2^+ = c_2^-$.

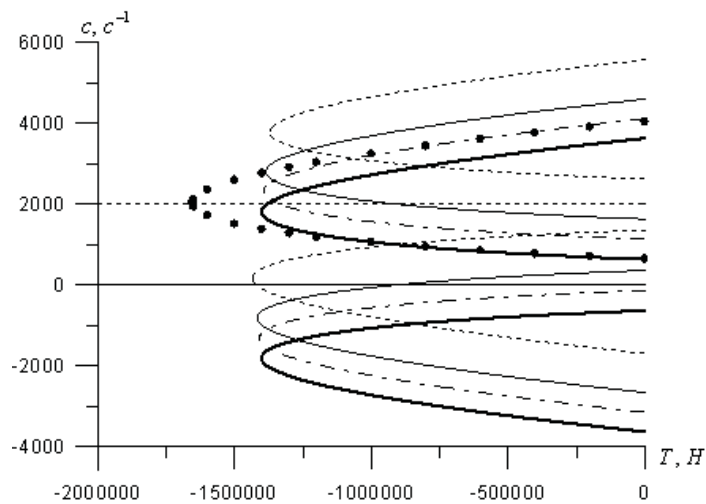


Рисунок 4

С увеличением угловой скорости вращения ω зависимости $c_i(T)$ теряют симметрию относительно оси абсцисс, поскольку кратные частоты расщепляются. Для этого случая кривые, расположенные ниже прямой $c=0$, соответствуют прямой прецессии, кривые, проходящие выше этой оси – обратной прецессии. Штрихпунктирные линии соответствуют $\omega=500 \text{ с}^{-1}$, тонкие сплошные – $\omega=1000 \text{ с}^{-1}$, тонкие пунктирные – $\omega=2000 \text{ с}^{-1}$. При $\omega=1000 \text{ с}^{-1}$ кривая пересекает ось абсцисс при значении $T=910000 \text{ Н}$. Этот случай соответствует квазистатической потере устойчивости трубы. Аналогично, при $\omega=2000 \text{ с}^{-1}$ выпучивание трубы происходит при $T=1420000 \text{ Н}$.

Как известно [5], резонансные режимы движения вращающейся цилиндрической оболочки наступают тогда, когда значение собственной частоты обратной прецессии совпадает со значением угловой скорости вращения ω . Из рис.4 видно, что в рассмотренном диапазоне изменения угловой скорости вращения и следящей силы T резонансные режимы движения не реализуются, поскольку при заданном значении ω прямая $c=\omega$ не пересекает соответствующие кривые $c_i(T)$.

Аналогичные исследования были выполнены для валов с другими длинами L . Как показали расчеты, с увеличением L разница

между значениями $T_{кр}$, найденных по теориям балок и оболочек, становится менее заметной, с уменьшением L реализуется обратный эффект.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют, что если на тонкостенный вращающийся вал действует продольная сжимающая следящая сила, то в зависимости от соотношения между величинами угловой скорости вращения и продольной нагрузки может быть реализовано как квазистатическая, так и динамическая потери устойчивости. Для сравнительно длинных трубчатых стержней значения критических нагрузок незначительно зависят от выбора модели стержней или теории тонких оболочек, с уменьшением длины расхождение между этими расчетными величинами становится более заметным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
5. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
7. Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А. О связи критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях с частотами собственных прецессионных колебаний // Пробл. прочн. – 2004. – № 2. – С. 52 – 66.
8. Соловьев И.Л. О вращении жестких и упругих цилиндрических оболочек, упруго связанных с основанием // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 107 – 115.

Получено 29.01.2009г.