УДК 534-21:537.226.86

М.О. Шульга, Л.О. Григор’єва

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ШАРУ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗБУРЕННЯХ

Пропонується розв’язок задачі про нестаціонарні коливання п’єзоелек-тричного плоского шару при електричному збуренні методом послідовних наближень.

Для розв’язання задач електропружності, які мають малий параметр, викликаний слабкою електромеханічною зв’язаністю (малістю п’єзоелектричних модулів e_{ij}) зручно застосовувати метод послідовних наближень. В цьому методі електричні та механічні величини знаходяться в різних наближеннях через відомі з попереднього наближення значення механічних або електричних величин відповідно.

Розглядається поляризований по товщині п’єзоелектричний шар, коливання якого описуються системою рівнянь електропружності [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \qquad \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\sigma_x = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad D_x = e_{33}\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{2}$$

На зовнішніх електродованих вільних від механічних навантажень поверхнях $x = \pm h$ шару задається різниця потенціалів $2V(t)$:

$$\varphi(\pm h,\ t) = \pm V(t); \qquad \sigma_x(\pm h,\ t) = 0. \tag{3}$$

Початкові умови приймаємо нульовими:

$$u(x,0) = 0; \qquad \dot{u}(x,0) = 0. \tag{4}$$

В отриманій початково-крайовій задачі (1)-(4) вводяться безрозмірні величини [3]:

$$\bar{x} = x/h,\ \bar{t} = t/(h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}),\ \bar{u} = u/h,\ \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/c_{00},\ \bar{\rho} = \rho/\rho_{00},$$

$$\overline{\varphi} = \varphi\sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00}h^2}}\,,\ \overline{D}_x = \frac{D_x}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}\,,\ \overline{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}\,,\ \overline{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}\,,\ \overline{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}\,.$$

Надалі знаки безрозмірності опущені, всі результати представлені в безрозмірному вигляді, параметр h залишено для загальності розв'язку.

Інтегруючи рівняння для електричної індукції, визначаємо електричний потенціал через переміщення

$$\varphi(x,\ t) = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}\left(u(x,\ t) - \frac{x}{h}u(h,\ t)\right) + \frac{x}{h}V(t)\,. \tag{5}$$

Рівняння руху представляється в вигляді хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{6}$$

при початкових умовах (4) та граничних умовах

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pm h, t) = -\frac{e_{33}}{c_{33}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\pm h, t)\,, \tag{7}$$

де $c_1 = \sqrt{(c_{33} + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}) / \rho}$ – швидкість поширення хвилі в електропружному середовищі в напрямку поляризації.

В нульовому наближенні маємо задачу про розподіл потенціалу в діелектричному плоскому шарі, розв'язок якої має вигляд $\varphi^{(0)} = xV(t)/h$.

Наближення для механічних змінних антисиметричні по переміщеннях і симетричні по напруженнях відносно серединної площини шару. Таким чином, в першому наближенні маємо задачу, яка описується хвильовим рівнянням (6) при нульових початкових умовах та граничних умовах

$$u^{(1)}(0,\ t) = 0\,, \qquad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(h,\ t) = -\frac{e_{33}}{hc_{33}}V(t)\,. \tag{8}$$

Розв'язок отриманої задачі шукається за допомогою методу характеристик [2].

В другому та наступних наближеннях, де n – парне, електричний потенціал визначається за формулою, що випливає з (5):

$$\varphi^{(n)}(x,\ t) = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}\left(u^{(n-1)}(x,\ t) - \frac{x}{h}u^{(n-1)}(h,\ t)\right) + \frac{x}{h}V(t)\,. \tag{9}$$

Переміщення в непарних наближеннях $n = 3, 5, 7...$ знаходяться з рівняння (6) при нульових початкових умовах та граничних умовах (7), що враховують (9):

$$u^{(n)}(0,\ t) = 0\,,$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(h,\ t) = -\frac{e_{33}{}^{2}}{c_{33}\varepsilon_{33}}\left(\frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x}(h,\ t) - \frac{1}{h}u^{(n-2)}(h,\ t)\right) - \frac{e_{33}}{c_{33}}\frac{V(t)}{h}\,. \qquad (10)$$

Механічні напруження знаходяться за допомогою виразу

$$\sigma_x^{(n)} = c_{33}^{E}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + e_{33}\frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial x}\,.$$

Кількість необхідних наближень методу послідовних наближень залежить від величини п'єзоелектричних модулів та часового інтервалу.

Проведемо аналіз електромеханічного стану п'єзоелектричного шару при безрозмірних сталих $e_{33} = 0.3$, $c_{33} = 1$, $\rho = 1$, $\varepsilon_{33} = 1$. Аналогічно до [1] розглянемо раптово прикладену постійну електричну напругу $V(t) = V_0 H(t)$, $V_0 = 1$, де $H(t)$– функція Хевісайда.

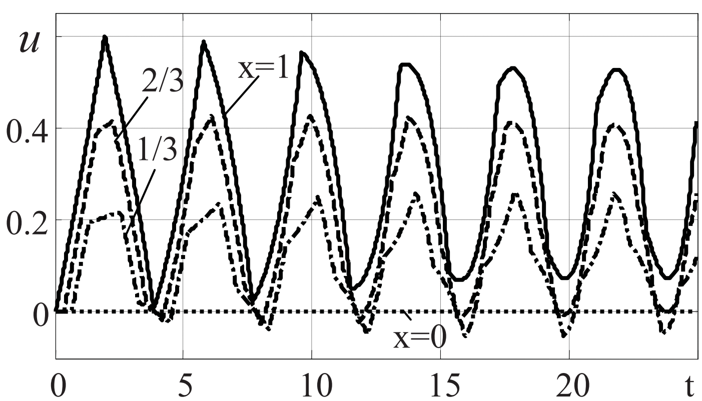

Рисунок 1

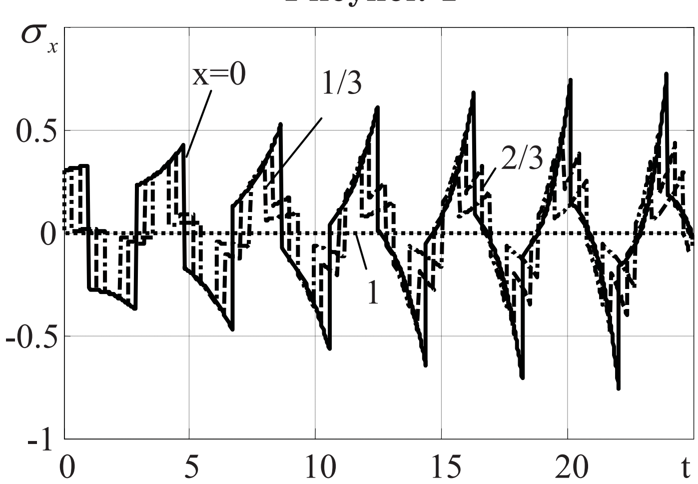

Рисунок 2

Рис. 1 та рис. 2 ілюструють зміну механічних переміщень та напружень в різних точках перерізу відповідно, отримані в сьомому наближенні методу.

З моменту прикладання навантаження від вільних поверхонь починають поширюватися хвилі переміщень зі швидкістю c_1. Електромеханічний стан тіла змінюється періодично. Максимальні переміщення $u_{\max} = 0.6$ виникають на першому інтервалі, надалі чіткість

 ISSN 1562-9945

зломів та амплітуда коливань кривих переміщень зменшується. Потрібно відмітити, що напруження в перерізі шару виникають миттєво, і до моменту приходу в цю точку переміщень з вільних поверхонь повністю визначаються електричним потенціалом. На кривих механічних напружень та переміщень в околі кількох перших стрибків спостерігаються горизонтальні ділянки, які надалі стають похилими. Екстремуми кривих переміщень з часом зменшуються, тоді як напруження зростають.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.М., Улитко А.Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. –1975. – **11**, №1– С. 22–27.
2. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики.– К.: Радянська школа, 1959. – 480 с.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.

Получено 23.01.2009г.