УДК 539.3

П.З. Луговой, Н.Я. Прокопенко

КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПЛАНОМ

Изучению колебаний ребристых пологих оболочек с прямоугольным планом посвящено достаточно большое число работ [1–3]. В отличие от известных работ здесь основное внимание уделено исследованию влияния упругого основания на собственные частоты колебаний таких оболочек. Исследование проведено на основе теории пологих ребристых оболочек [1], учитывающей дискретное размещение ребер. Упругое основание характеризуется коэффициентами постели Винклера и Пастернака [4,5].

1. Исходные соотношения. Рассматриваются пологие цилиндрические

оболочки с шарнирно опертыми краями, подкрепленные продольными и кольцевыми ребрами. Уравнения движения изотропных пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом, полученные в рамках классической теории оболочек [3] с учетом воздействия упругого основания, могут быть представлены в виде

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_1+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]-\rho_0 h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+$$

$$+F_1\sum_{j_1=1}^{k_1}\delta\left(x_2-x_{2j_1}\right)\left[E_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-h_1\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3}\right)-\rho_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-h_1\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\partial t^2}\right)\right]\Bigg|_{x_2=x_{2j_1}}=0,$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_2-\frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right]-\rho_0 h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+$$

$$+F_2\sum_{j_2=1}^{k_2}\delta\left(x_1-x_{1j_2}\right)\left[E_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}-h_2\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3}-\frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)-\right.$$

$$\left.\rho_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-h_2\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2\partial t^2}\right)\right]\Bigg|_{x_1=x_{1j_2}}=0,$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[-\frac{\nu}{R}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{R^2}u_3\right]+\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta\Delta u_3+\rho_0 h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}-$$

$$C_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}-C_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+C_1u_3+\sum_{j_1=1}^{k_1}\left\{\delta\left(x_2-x_{2j_1}\right)\left[\quad E_1\left(F_1h_1^2+I_{x_21}\right)\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4}\right.\right.$$

$$\left.-E_1F_1h_1\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}+-\rho_1F_1\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\partial t^2}-h_1\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2\partial t^2}\right)\right]+$$

$$\left.\left.\frac{d\delta\left(x_2-x_{2j_1}\right)}{dx_2}G_1I_{kp1}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2\partial x_2}\right\}\right|_{x_2=x_{2j_1}}+$$

$$+\sum_{j_2=1}^{k_2}\left\{\delta\left(x_1-x_{1j_2}\right)\left[-\frac{E_2F_2}{R}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{u_3}{R}\right)+E_2\left(F_2h_2^2+I_{x_12}\right)\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4}+\right.\right.$$

$$+2\frac{E_2F_2h_2}{R}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}-E_2F_2h_2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3}-$$

$$\left.\left.-\rho_2F_2\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2\partial t^2}-h_2\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2\partial t^2}\right)\right]+\frac{d\delta\left(x_1-x_{1j_2}\right)}{dx_1}G_2I_{kp2}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^2\partial x_1}\right\}\Bigg|_{x_1=x_{1j_2}}=0,\quad(1)$$

где x_1, x_2 – декартовы координаты точки на срединной поверхности обшивки, u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора перемещений этой точки, t – время, h – толщина обшивки, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, из которого изготовлена обшивка; $F_1, I_1, I_{z1}, I_{kp1}$ – площадь поперечного сечения стрингеров и соответственно его моменты инерции при изгибе в плоскости, нормальной к срединной поверхности обшивки, при изгибе в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, и при кручении, h_1 – расстояние от оси стрингера до срединной плоскости обшивки ($h_1>0$, если ребро размещено в направлении внешней нормали к обшивке), E_1, G_1, ρ_1 – модуль упругости и модуль сдвига, а также плотность материала, из которого изготовлены стрингеры, k_1 – число стрингеров; $F_2, I_2, I_{z2}, I_{kp2}, h_2, E_2, \rho_2, k_2$ – аналогичные величины для шпангоутов; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, x_{2j_1}, x_{1j_2} – координаты осей j_1, j_2 ребер соответственно первого и второго направления.

Решение системы уравнений движения (1) разыскивается в виде двойных тригонометрических рядов:

$$u_1 = \cos\omega t \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos\frac{\pi m x_1}{a_1} \sin\frac{\pi n x_2}{a_2},$$

$$u_2 = \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v_{mn} \sin\frac{\pi m x_1}{a_1} \cos\frac{\pi n x_2}{a_2},$$

$$u_3 = \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{\pi m x_1}{a_1} \sin\frac{\pi n x_2}{a_2}, \qquad (2)$$

где ω - круговая частота.

После подстановки (2) в (1) задача определения собственных частот колебаний сводится к нахождению корней редуцированных систем алгебраических уравнений, а определение собственных форм колебаний - к решению указанных систем.

2. Влияние упругого основания на собственные частоты и формы колебаний. Исследование влияния упругого основания на собственные частоты и формы колебаний проведено на примере квадратной в плане пологой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом и стрингером по центральным сечениям.

Расчеты производились для пологой ребристой оболочки, имеющей следующие геометрические и механические характеристики:

$$\nu = 0,3; \ \frac{h}{a} = 0,01; \ \frac{a}{R} = 0,1; \ \frac{E_1}{E} = \frac{E_2}{E} = 1; \ \frac{G_1}{E} = \frac{G_2}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)}; \ \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho} = 1;$$

$$k_1 = k_2 = 1; \quad \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{a} = 0,055; \quad \frac{F_1}{ah} = \frac{F_2}{ah} = 0,2; \quad \frac{I_1}{a^3h} = \frac{I_2}{a^3h} = 0,1667\cdot 10^{-3};$$

$$\frac{I_{z1}}{a^3h} = \frac{I_{z2}}{a^3h} = 0,6667\cdot 10^{-5}; \ \frac{I_{kp1}}{a^3h} = \frac{I_{kp2}}{a^3h} = 0,2328\cdot 10^{-4}.$$

В табл.1 приведены результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от значений параметра постели Винклера $\bar{C}_1$ ($\bar{C}_1 = \dfrac{C_1(1-\nu^2)a^2}{Eh}$).

Значения первых пяти собственных частот в зависимости от изменения параметров постели Пастернака $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ ($\bar{C}_2 = C_2 / Eh$) приведены в табл.2.

 ISSN 1562-9945

Таблица 1

$\overline{C}_1$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,002	0,836	0,849	0,923	0,934	1,830
0,004	0,856	0,867	0,943	0,954	1,842
0,006	0,876	0,885	0,963	0,974	1,855
0,008	0,896	0,903	0,983	0,994	1,867
0,010	0,916	0,922	1,003	1,014	1,879
0,012	0,936	0,940	1,023	1,034	1,892
0,014	0,966	0,967	1,053	1,064	1,910
0,016	0,975	0,976	1,063	1,074	1,917

Таблица 2

$\overline{C}_1$; $\overline{C}_2$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0; 0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,01; 0,0001	0,925	0,927	1,011	1,022	1,886
0,01; 0,0002	0,932	0,933	1,020	1,031	1,893
0,01; 0,0003	0,937	0,941	1,029	1,040	1,900
0,01; 0,0004	0,942	0,950	1,037	1,048	1,908
0,01; 0,0005	0,947	0,958	1,046	1,057	1,915

На рис.1 показаны кривые изменения параметра $\omega_1^2 = \omega^2 a^2 \rho / E$ минимальной частоты колебаний в зависимости от параметров постели Винклера (сплошная кривая) и Пастернака (пунктирная кривая). Как видно из графиков, влияние коэффициентов постели Пастернака сказывается больше на величине минимальных частот колебаний, $\overline{u}_2$ $\overline{u}_3$ $\frac{x_1}{a_1}$ $\frac{x_1}{a_1}$ чем коэффициента постели Винклера.

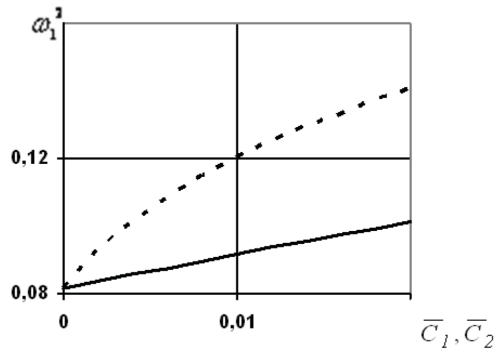

Рисунок 1

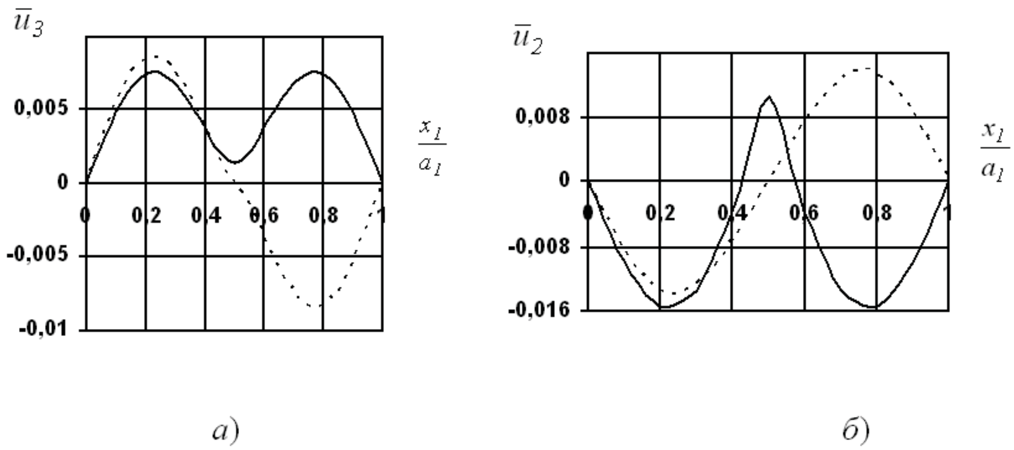

Рисунок 2

На рис.2*а,б* показаны соответственно формы изменения прогиба $\bar{u}_3$ и перемещения в окружном направлении $\bar{u}_2$ по длине оболочки, полученные для минимальных частот ω_1^2 =0,093 (сплошная линия) и ω_1^2=0,092 (пунктирная линия) соответственно для $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2$=0,0002 и $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2$=0,0001. Хотя незначительное изменение коэффициентов постели C_1 и C_2 приводит к несущественному изменению значений минимальной частоты, но при этом происходит изменение формы колебаний. Как видно из рис.2*а*, пунктирная кривая, соответствующая случаю, когда $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2$=0,0001, свидетельствует о том, что при реализации этой формы колебаний ребра работают только на кручение и изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, а сплошная кривая, соответствующая случаю, когда $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2$=0,0002, показывает, что при такой форме колебаний ребра практически не деформируются.

ISSN 1562-9945

Результаты анализа полученных данных показывают, что с изменением величины коэффициентов постели упругого основания происходит не только изменение величины собственных частот колебаний, но при этом происходит и изменение формы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. Думка, 1980. – 386 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.2).

2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Статика, динамика и устойчивость ребристих оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНИТИ,1990. – Т.21. – С.132–191.

3. Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. Колебания и устойчивость пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом // Прикл. механика. – 2002. – 38, №6, с. 84–90.

4. Луговий П.З., Подільчук І.Ю., Головко К.Г. Про вплив пружної основи на поширення гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці //
Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, №1. – С. 98–106.

5. Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. К.: Вища школа. 1989. – 399 с.

Получено 17.01.2009г.