УДК 539.374

Є.А. Сторожук

ВАРІАЦІЙНИЙ ВЕКТОРНО-РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК З КРИВОЛІНІЙНИМИ ОТВОРАМИ

Вступ. Розв'язання аналітичними методами фізично і геометрично нелінійних крайових задач для оболонок Кірхгофа-Лява, послаблених отворами, пов'язано із значними математичними труднощами. Тому дослідження нелінійного деформування гнучких оболонок за межею пружності виконують, в основному, з використанням чисельних методів сіткового виду, до яких належать метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-різницевий метод (ВРМ) і метод скінченних елементів (МСЕ).

МСЕ розв'язано значну кількість одновимірних і двовимірних нелінійних задач концентрації напружень в оболонках як простої, так і складної геометрії [4,7].

Результати, отримані за допомогою МСР, відносяться переважно до вісесиметричного деформування оболонок [4,5,8].

Традиційний ВРМ, в якому гіпотези Кірхгофа-Лява реалізовані звичайним шляхом (підстановкою у співвідношення для деформацій замість кутів повороту нормалі їх виразів через переміщення точок серединної поверхні оболонки), знайшов застосування при розв'язанні як вісесиметричних, так і невісесиметричних нелінійних задач для оболонок простої геометрії [4,6,8,9].

Нижче описано варіант ВРМ для дослідження пружнопластичного стану гнучких оболонок складної геометрії.

Постановка задачі. Тонку довільну оболонку товщини h, яка послаблена отворами і знаходиться під дією поверхневих $\left\{p\right\}=\left\{p_1,p_2,p_3\right\}^T$ та крайових $\left\{m_k\right\}=\left\{T_k,S_k,Q_k,M_k\right\}^T$ сил, віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\left(\alpha_1,\alpha_2,\gamma\right)$. Нехай при підвищених рівнях навантаження в оболонці виникають пластичні деформації її матеріалу і скінченні прогини.

Зв’язок між компонентами тензора деформацій і вектора переміщень точок серединної поверхні запишемо на основі геометрично нелінійної теорії непологих оболонок у квадратичному наближенні, в якій прийняті гіпотези Кірхгофа-Лява. Вирази для компонент мембранної (ε_{ij}) і згинної (μ_{ij}) деформацій подамо у векторній формі:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{2}\theta_1^2; \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \theta_1\theta_2 ; \qquad \varepsilon_{11}^0 = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} ;$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_2 \partial \alpha_2} ;$$

$$\mu_{11} = -\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} ; \theta_1 = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \to 2) ; \qquad (1)$$

$$2\mu_{12} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_1 \partial \alpha_1} - \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_2 \partial \alpha_2} ,$$

де A_1, A_2 – параметри Ламе; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ - орти криволінійної ортогональної системи координат ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma$); $\vec{U} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ - вектор переміщень; $\vec{\theta} = \theta_1\vec{e}_1 + \theta_2\vec{e}_2$ - вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній.

Приймаючи, що навантаження просте, при дослідженні деформування оболонок за межею пружності будемо користуватися співвідношеннями теорії малих пружно-пластичних деформацій.

Внутрішні зусилля і моменти подамо у вигляді:

$$T_{11} = S_{11} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} M_{11} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} M_{12} ;$$

$$T_{12} = S_{12} + \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} M_{12} + \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} M_{11} ;$$

$$S_{11} = S_{11}^0 + S_{11}^H ; \quad S_{12} = S_{12}^0 + S_{12}^H ; \quad M_{11} = M_{11}^0 + M_{11}^H ; \quad M_{12} = M_{12}^0 + M_{12}^H ;$$

$$S_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} d\gamma ; \; S_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d\gamma ; \; M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\gamma \, d\gamma ; \; M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\gamma \, d\gamma ; (2)$$

$$((S_{ij}, M_{ij}, \sigma_{ij}) \to (S_{ij}^0, M_{ij}^0, \sigma_{ij}^0), (S_{ij}^H, M_{ij}^H, \sigma_{ij}^H)), \; (1 \leftrightarrow 2) ,$$

де σ_{ij} - компоненти напружень в довільній точці оболонки; величини з індексами «0» і «Н» зверху відповідають лінійним і нелінійним членам у відповідних виразах.

 ISSN 1562-9945

Відмітимо, що компоненти деформації оболонки, визначені за формулами (1), є енергетичними відносно симетричних зусиль (S_{ij}) і моментів (M_{ij}), тобто відповідають їм у виразі для енергії деформації.

Змішаний функціонал для гнучких пружно-пластичних оболонок. Розв'язувальні рівняння в переміщеннях теорії тонких оболонок при застосуванні МСЕ і ВРМ отримують з умов стаціонарності функціоналу Лагранжа, в якому кути повороту θ_1 і θ_2 обчислюються через вектор переміщень $\vec{U}$ у відповідності з формулами (1), що приводить до появи похідних другого порядку і ускладнює процес дискретизації. Альтернативний шлях полягає в прийнятті кутів повороту θ_1 і θ_2 за незалежні функції, реалізації зв'язку кутів повороту з вектором переміщень за допомогою множників Лагранжа і побудові відповідного змішаного функціоналу, який не містить похідних вище першого порядку. Такий підхід до побудови функціонала для тонких оболонок є, по суті, реалізацією гіпотез Кірхгофа-Лява за допомогою множників Лагранжа. Стосовно ВРМ, метод множників Лагранжа для реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява, напевне, вперше був запропонований в роботі [2] з подальшим продовженням в [3,6,8,9].

З умов стаціонарності змішаного функціоналу отримаємо систему нелінійних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан оболонки при сумісному врахуванні пластичних деформацій і скінченних прогинів. Розроблена в роботі методика розв'язання нелінійних рівнянь базується на використанні методу послідовних наближень (простих ітерацій) в поєднанні з варіаційним векторно-різницевим методом (ВВРМ). В цьому випадку лінеаризований змішаний функціонал з використанням співвідношень (1), (2) запишемо у вигляді:

$$\Pi^{ЛН} = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\left(S_{11}^{0}\varepsilon_{11}^{0} + S_{22}^{0}\varepsilon_{22}^{0} + S_{12}^{0}\varepsilon_{12}^{0} + M_{11}^{0}\mu_{11} + M_{22}^{0}\mu_{22} + 2M_{12}^{0}\mu_{12}\right)d\Sigma +$$

$$+\iint_{\Sigma}\left[\left(S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2\right)\theta_1 + \left(S_{22}\theta_2 + S_{12}\theta_1\right)\theta_2 + S_{11}^{H}\varepsilon_{11}^{0} + S_{22}^{H}\varepsilon_{22}^{0} + S_{12}^{H}\varepsilon_{12}^{0} +\right.$$

$$\left.+M_{11}^{H}\mu_{11} + M_{22}^{H}\mu_{22} + 2M_{12}^{H}\mu_{12}\right]d\Sigma + \iint_{\Sigma}\left(T_{1\gamma}\varepsilon_{1\gamma} + T_{2\gamma}\varepsilon_{2\gamma}\right)d\Sigma - A_P\,, \qquad (3)$$

де A_P - робота зовнішніх поверхневих і контурних сил; Σ - область серединної поверхні оболонки; $T_{1\gamma}, T_{2\gamma}$ - множники Лагранжа; $\varepsilon_{1\gamma}$, $\varepsilon_{2\gamma}$ - вирази виду: $\varepsilon_{1\gamma} = -\vec{\theta} \cdot \vec{e}_1 + \vec{n} \cdot \dfrac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \to 2)$.

В змішаному функціоналі (3) немає похідних вище першого порядку, розв'язуючими є сім функцій $(u, v, w, \theta_1, \theta_2, T_{1\gamma}, T_{2\gamma})$, які можна незалежно варіювати.

Методика чисельного розв'язання двовимірних задач для тонких оболонок. Розглянемо випадок, коли область (Σ) зміни координат (α_1, α_2) є складною, тобто такою, в якій не всі контурні лінії співпадають з координатними лініями. Для отримання різницевих рівнянь розбиваємо область (Σ) на (K_Φ) криволінійних чотирикутних фрагментів, в кожному з яких вводимо локальну косокутну систему координат (ξ, η).

Перейдемо у геометричних та фізичних співвідношеннях до косокутних координат (ξ, η) і перетворимо функціонал (3) до вигляду:

$$\Pi^{ЛН} = \sum_{k=1}^{K_\Phi} \Bigg\{ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_k} \Big[d_{11}(\varepsilon^0_{\xi\xi})^2 + d_{22}(\varepsilon^0_{\eta\eta})^2 + d_{33}(\varepsilon^0_{\xi\eta})^2 + 2d_{12}\varepsilon^0_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\eta\eta} + 2d_{13}\varepsilon^0_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\xi\eta} + 2d_{23}\varepsilon^0_{\eta\eta}\varepsilon^0_{\xi\eta} +$$
$$+ d_{44}\mu^2_{\xi\xi} + d_{55}\mu^2_{\eta\eta} + 4d_{66}\mu^2_{\xi\eta} + 2d_{45}\mu_{\xi\xi}\mu_{\eta\eta} + 4d_{46}\mu_{\xi\xi}\mu_{\xi\eta} + 4d_{56}\mu_{\eta\eta}\mu_{\xi\eta} \Big] d\Sigma +$$
$$+ \iint_{\Sigma_k} \Big[(S_{\xi\xi}\theta_\xi + S_{\xi\eta}\theta_\eta)\theta_\xi + (S_{\eta\eta}\theta_\eta + S_{\xi\eta}\theta_\xi)\theta_\eta + S^H_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\xi\xi} + S^H_{\eta\eta}\varepsilon^0_{\eta\eta} + S^H_{\xi\eta}\varepsilon^0_{\xi\eta} +$$
$$+ M^H_{\xi\xi}\mu_{\xi\xi} + M^H_{\eta\eta}\mu_{\eta\eta} + 2M^H_{\xi\eta}\mu_{\xi\eta} \Big] d\Sigma + \iint_{\Sigma_k} \Big(T_{\xi\gamma}\varepsilon_{\xi\gamma} + T_{\eta\gamma}\varepsilon_{\eta\gamma} \Big) d\Sigma \Bigg\} - A_P, \qquad (4)$$

де $d_{11}, d_{12}, \ldots d_{66}$ - елементи матриці жорсткостей оболонки.

Область зміни локальних координат (ξ, η), яка для кожного фрагменту є прямокутником, покриваємо основною (i, j) і допоміжною $\left(i + \dfrac{1}{2}, j + \dfrac{1}{2}\right)$ системами сіток з кроками l і δ вздовж координатних ліній ξ і η, у виразі (4) для змішаного функціоналу переходимо від диференціювання до скінченних різниць і від інтегрування – до підсумовування за формулою прямокутників.

ISSN 1562-9945

Компоненти деформації оболонки в косокутній системі координат (ξ,η) обчислюються наближено за скінченно-різницевими формулами:

$$\varepsilon_{\xi\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}=\varepsilon^0_{\xi\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{1}{2}\theta^2_\xi\Big|_{i+\frac{1}{2},j};\ \ \varepsilon^0_{\xi\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{\vec{U}_{i+1,j}-\vec{U}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j};$$

$$\varepsilon_{\eta\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}=\varepsilon^0_{\eta\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\theta^2_\eta\Big|_{i,j+\frac{1}{2}};\ \ \varepsilon^0_{\eta\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{\vec{U}_{i,j+1}-\vec{U}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}};$$

$$\theta_\xi\Big|_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{\vec{\theta}_{i+1,j}+\vec{\theta}_{i,j}}{2}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j};\ \theta_\eta\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}=\frac{\vec{\theta}_{i,j+1}+\vec{\theta}_{i,j}}{2}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}};$$

$$\varepsilon_{\xi\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\varepsilon^0_{\xi\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\left(\theta_\xi\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\theta_\xi\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}\right)\left(\theta_\eta\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\theta_\eta\Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}\right);$$

$$\varepsilon^0_{\xi\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{U}_{i+1,j}-\vec{U}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{\vec{U}_{i+1,j+1}-\vec{U}_{i,j+1}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{U}_{i,j+1}-\vec{U}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{\vec{U}_{i+1,j+1}-\vec{U}_{i+1,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}\right);$$

$$\mu_{\xi\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{\vec{\theta}_{i+1,j}-\vec{\theta}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{\vec{U}_{i+1,j}-\vec{U}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\xi}\Big|_{i+\frac{1}{2},j};\qquad(5)$$

$$\mu_{\eta\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}=-\frac{\vec{\theta}_{i,j+1}-\vec{\theta}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{\vec{U}_{i,j+1}-\vec{U}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\eta}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}};$$

$$2\mu_{\xi\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\theta}_{i+1,j}-\vec{\theta}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{\vec{\theta}_{i+1,j+1}-\vec{\theta}_{i,j+1}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\theta}_{i,j+1}-\vec{\theta}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{\vec{\theta}_{i+1,j+1}-\vec{\theta}_{i+1,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{U}_{i+1,j}-\vec{U}_{i,j}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}+\right.$$

$$\left.+\frac{\vec{U}_{i+1,j+1}-\vec{U}_{i,j+1}}{l}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\eta}\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{U}_{i,j+1}-\vec{U}_{i,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\xi}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{\vec{U}_{i+1,j+1}-\vec{U}_{i+1,j}}{\delta}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial\xi}\Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}\right),$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор точок серединної поверхні.

Зауважимо, що ідея застосування скінченних різниць у векторних співвідношеннях лежить в основі методу криволінійних сіток [1].

Інтеграли у функціоналі (4) замінюються сумами за схемою:

$$\iint\limits_{\Sigma_k}(\ldots)\,d\Sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^{I_k-1}\sum_{j=1}^{J_k}\left\{\frac{1}{2}\left[\,d_{11}(\varepsilon^0_{\xi\xi})^2 + d_{44}\mu^2_{\xi\xi}\,\right] + T_{\xi\gamma}\varepsilon_{\xi\gamma} + (S_{\xi\xi}\theta_\xi + S_{\xi\eta}\theta_\eta)\theta_\xi + S^H_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\xi\xi} + M^H_{\xi\xi}\mu_{\xi\xi}\right\}\omega\Big|_{i+\frac{1}{2},j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{I_k}\sum_{j=1}^{J_k-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\,d_{22}(\varepsilon^0_{\eta\eta})^2 + d_{55}\mu^2_{\eta\eta}\,\right] + T_{\eta\gamma}\varepsilon_{\eta\gamma} + (S_{\eta\eta}\theta_\eta + S_{\xi\eta}\theta_\xi)\theta_\eta + S^H_{\eta\eta}\varepsilon^0_{\eta\eta} + M^H_{\eta\eta}\mu_{\eta\eta}\right\}\omega\Big|_{i,j+\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{I_k-1}\sum_{j=1}^{J_k-1}\left\{\frac{1}{2}\Big[d_{33}(\varepsilon^0_{\xi\eta})^2 + 2d_{12}\varepsilon^0_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\eta\eta} + 2d_{13}\varepsilon^0_{\xi\xi}\varepsilon^0_{\xi\eta} + 2d_{23}\varepsilon^0_{\eta\eta}\varepsilon^0_{\xi\eta} + 4d_{66}\mu^2_{\xi\eta} +\right.$$

$$\left.+2d_{45}\mu_{\xi\xi}\mu_{\eta\eta} + 4d_{46}\mu_{\xi\xi}\mu_{\xi\eta} + 4d_{56}\mu_{\eta\eta}\mu_{\xi\eta}\Big] + S^H_{\xi\eta}\varepsilon^0_{\xi\eta} + 2M^H_{\xi\eta}\mu_{\xi\eta} - \vec{p}\cdot\vec{U}\right\}\omega\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

де $\omega(\xi,\eta)$ - частина елемента площі $\left(A_1A_2|J|l\delta\right)$ з центром в точці (ξ,η), яка належить фрагменту (Σ_k); $|J|$- якобіан; $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{n}$ - вектор поверхневих сил.

З умов стаціонарності дискретного аналога функціоналу (4) отримаємо систему різницевих рівнянь, яка у внутрішньому вузлі (i,j) фрагмента має вигляд:

$$\left\{\left[\frac{\omega}{l}\left(T^0_{\xi\xi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + T^0_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} + T_{\xi\gamma}\vec{n}\right)\right]\Bigg|^{i+\frac{1}{2},j}_{i-\frac{1}{2},j} +\right.$$

$$+\left[\frac{\omega}{\delta}\left(T^0_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + T^0_{\eta\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} + T_{\eta\gamma}\vec{n}\right)\right]\Bigg|^{i,j+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Big[(\omega\vec{p})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} +$$

$$\left.+(\omega\vec{p})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\omega\vec{p})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\omega\vec{p})_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\Big]\right\}\cdot\vec{e}_1\Big|_{i,j} + \Phi_1\Big|_{i,j} = 0 \qquad ;$$

$$\left((\vec{e}_1,\Phi_1)\to(\vec{e}_2,\Phi_2),(\vec{n},\Phi_3)\right)$$

$$\Phi_1\Big|_{i,j} = \left\{\left[\frac{\omega}{l}\left(T^H_{\xi\xi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + T^H_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)\right]\Bigg|^{i+\frac{1}{2},j}_{i-\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta}\left(T^H_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + T^H_{\eta\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)\right]\Bigg|^{i,j+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}}\right\}\cdot\vec{e}_1\Big|_{i,j} \;; \quad (7)$$

$$\left\{\left[\frac{\omega}{l}\left(M^0_{\xi\xi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + M^0_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)\right]\Bigg|^{i+\frac{1}{2},j}_{i-\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta}\left(M^0_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + M^0_{\eta\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)\right]\Bigg|^{i,j+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\left(\omega T_{\xi\gamma}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right)_{i+\frac{1}{2},j} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\omega T_{\xi\gamma}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\omega T_{\eta\gamma}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\omega T_{\eta\gamma}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\vec{e}_1\Big|_{i,j} + \Phi_4\Big|_{i,j} = 0$$

$$\left(\vec{e}_1,\Phi_4 \to \vec{e}_2,\Phi_5\right) \;;$$

$$\Phi_4\Big|_{i,j} = \left\{ \left[\frac{\omega}{l}\left(M^H_{\xi\xi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + M^H_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right) \right] \Bigg|^{i+\frac{1}{2},j}_{i-\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta}\left(M^H_{\xi\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} + M^H_{\eta\eta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right) \right] \Bigg|^{i,j+\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\omega(T_{\xi\xi}\theta_\xi + T_{\xi\eta}\theta_\eta)\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\omega(T_{\xi\xi}\theta_\xi + T_{\xi\eta}\theta_\eta)\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \right)_{i-\frac{1}{2},j} + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\omega(T_{\eta\eta}\theta_\eta + T_{\xi\eta}\theta_\xi)\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\omega(T_{\eta\eta}\theta_\eta + T_{\xi\eta}\theta_\xi)\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \right\} \cdot \vec{e}_1\Big|_{i,j} ;$$

$$\left(\omega\varepsilon_{\xi\gamma}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\omega\varepsilon_{\xi\gamma}\right)_{i-\frac{1}{2},j} = 0; \quad \left(\omega\varepsilon_{\eta\gamma}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\omega\varepsilon_{\eta\gamma}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = 0,$$

де Φ_k - нелінійні члени рівнянь, які відомі з попереднього наближення.

Послідовна підстановка різницевих співвідношень для компонент деформації і внутрішніх зусиль та моментів в (7) приводить до системи розв'язувальних алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі записується так:

$$\left[A\right]\left\{V\right\} = \left\{P\right\} + \left\{\Phi\right\}, \tag{8}$$

де $\left[A\right]$ - матриця системи (8); $\left\{V\right\}$ - глобальний вектор вузлових невідомих; $\left\{P\right\}$ - вектор навантажень; $\left\{\Phi\right\}$ - вектор нелінійностей.

Висновки. Таким чином, в роботі запропоновано варіант ВВРМ для розв'язання фізично і геометрично нелінійних задач теорії тонких оболонок, який базується на реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява за допомогою множників Лагранжа, записі геометричних співвідношень у векторній формі та розбитті серединної поверхні оболонки на криволінійні чотирикутні фрагменти. Розроблена методика дозволила побудувати для тонких оболонок функціонал, який не містить похідних вище першого порядку, а також повністю виключити негативний вплив жорстких переміщень на збіжність результатів чисельних розрахунків та надає можливість розв'язувати лінійні і нелінійні задачі для оболонок складної геометрії, зокрема, послаблених отворами і вирізами різноманітної форми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гоцуляк Е.А., Ермишев Е.Н., Жадрасинов Т.Н. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1981. – Вып. 39. – С. 80 - 84.

2. Ермаковская И.П., Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Нелинейно упругие двумерные задачи статики ортотропных тонких оболочек и методика их решения // Ред. ж. Прикл. механика. – Киев, 1988. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.10.88, № 7526 - В 88. – Аннот. в ж. Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 2. – С. 129.
3. Максимюк В.А. Про послідовне виключення множників Лагранжа // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2008. – № 4 (57).– С.45–47.
4. Максимюк В.А., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Решение нелинейных задач статики тонких оболочек сеточными методами // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 1. – С. 41 – 70.
5. Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов и др. – К.: Наук.думка,1980.- 636 с.
6. Механика композитов: В 12-ти т.; Т.7. Концентрация напряжений / А.Н. Гузь, А.С. Космодамианский, В.П.Шевченко и др.- К.:"А.С.К.",1998.-387 с.
7. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells // Int. Appl.Mech.- 2003.- 39, N6.- P. 679 - 687.
8. Guz A.N., Chernyshenko I. S., Shnerenko K.I. Stress Concentration near Opening in Shells Made of Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 139 – 181.
9. Macsimyuk V.A., Chernyshenko I. S. Mixed Functional in the Theory of Nonlineary Elastic Shells // Int.Appl.Mech.- 2004.- 40, N11.- P. 1226 - 1262.

Получено 13.04.2009г.