

УДК 51:612.846

Н.Г. Кирилах

## ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДІЇ ОКОРУХОВИХ М'ЯЗІВ

Математичне моделювання порівняно недавно почало застосовуватись в офтальмології. Однією з проблем тут залишається розробка математичних моделей дії окорухових м'язів. І труднощі, з якими стикається дослідник обумовлені не тільки винятковою складністю самого окорухового апарату, але і різноманітністю цілей, з якими такі моделі створюються. Для практикуючого офтальмолога, який займається хірургічним лікуванням багатьох форм косоокості, така модель необхідна для правильного розуміння функціонування м'язів, їх ролі при утворенні тих або інших синдромів та паталогій зору.

Однією із спроб побудувати таку модель є роботи [1]-[2]. Підхід, викладений в цих роботах, хоча і дозволяє отримати досить адекватне якісне і кількісне уявлення про зміну моментів сил тяги м'язів відносно координатних осей при обертаннях ока, має певні недоліки. Зокрема, не вказано джерело руху, м'язи розглядаються як пасивні об'єкти, які обертаються разом з оком. Не вказано, як відбувається виникнення моменту обертання і як задається напрям цього обертання.

В даній роботі робиться спроба побудувати математичну модель механізму дії окорухових м'язів при обертаннях ока.

Очне яблуко розглядається як сфера з певним радіусом  $r$ . Введено до розгляду тривимірну декартову систему координат  $OXYZ$ , таким чином, що точка  $O$  збігається з центром ока, вісь  $OY$  проходить через вершину рогівки ока, вісь  $OZ$  проходить через вершину ока. При обертаннях ока ця система залишається нерухомою.

Розглядаються основні групи окорухових м'язів: горизонтальні прямі м'язи  $MRM$  та  $MRL$ ; вертикальні прямі м'язи  $MRS$  та  $MRI$ ; косі м'язи: два верхніх косих –  $MOS$  та два нижніх косих –  $MOI$ . М'язи розглядаються як полоски, що мають певну зону прикріплення

до очного яблука. Місце прикріплення кожного м'яза представлено у вигляді трьох точок на поверхні очного яблука, а самі м'язи – як трійка векторів, що виходять із цих точок під певними кутами до координатних площин.

Для групи MRM та MRL напрямок тяги м'яза іде по дотичній до поверхні очного яблука в точці прикріплення, в горизонтальній площині; для групи MRS та MRI прийнято, що напрямок тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що проходить під кутом  $23^\circ$  до координатної площини OYZ назад і медіально (у негативному напрямку осей OX і OY); для точок прикріплення косих м'язів (MOS і MOI) приймаємо, що напрямок тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що має з площиною OYZ кут  $51^\circ$ , уперед і медіально (по осі OX у негативному напрямку, а по осі OY – у позитивному напрямку) [1]. З огляду на сказане вектори сил тяги в первинній позиції погляду побудовано у вигляді векторного добутку:

$$\vec{F}_i = \pm \frac{\vec{N}_i \times \vec{r}_i}{|\vec{N}_i \times \vec{r}_i|} \cdot K_i, \quad (1)$$

де  $\vec{r}(x_i, y_i, z_i)$  - радіус-вектор точки прикріплення  $i$ -го м'яза,  $\vec{N}(A_i, B_i, C_i)$  - координати нормального вектора певної площини. А саме: для точок прикріплення м'язів MRM та MRL необхідно прийняти  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ; для точок прикріплення м'язів MRS та MRI –  $A = \cos 23^\circ$ ,  $B = -\sin 23^\circ$ ,  $C = 0$ ; а для точок прикріплення м'язів MOS та MOI з умов випливає, що  $A = \cos 51^\circ$ ,  $B = \sin 51^\circ$ ,  $C = 0$ . Знак в (1) обираємо такий, щоб він забезпечував правильний напрям вектора тяги – зовні від поверхні очного яблука.  $K_i$  – довільний позитивний множник, який уведено для того, щоб управляти довжиною вектора (тобто змінювати абсолютне значення сили).

На рис. 1 показано описану вище систему векторів. Модель представлено за допомогою графічних можливостей MathCad.

Дія окорухових м'язів визначається величиною важелів м'язів і силою тяги кожного м'язу (довжиною вектора тяги), тобто, параметром  $K_i$ .

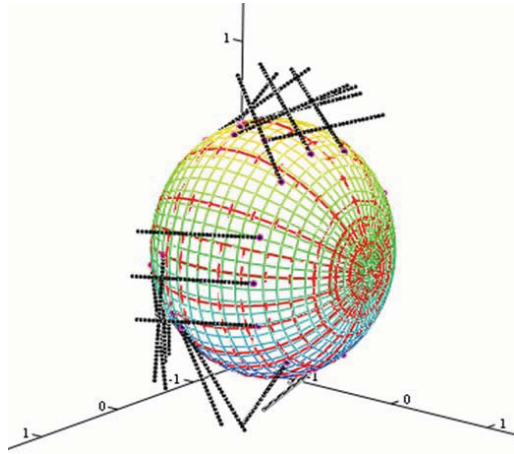


Рисунок 1 - Сферичне яблуко та вектори сил тяги в первинній позиції погляду

Момент обертання, який створюється кожним вектором, визначається за формулою

$$\vec{M}t_i = \vec{F}_i \times \vec{r}_i, \quad (2)$$

де  $\vec{F}_i$  – вектор тяги,  $\vec{r}_i$  – плече цього вектору відносно центру обертання.

Або, з використанням (1) із (2) маємо:

$$\vec{M}t_i = \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \pm \frac{K_i}{|\vec{N}_i \times \vec{r}_i|} (\vec{N}_i \times \vec{r}_i) \times \vec{r}_i, \quad (3)$$

тобто, вектор  $\vec{M}t_i$  буде компланарним до пари векторів  $\vec{N}_i$  та  $\vec{r}_i$  (див. рис.3).

Сума моментів усіх 24 векторів сил тяги м'язів і буде визначати момент, який обертає око. Значить, умова утримання ока в стані рівноваги запишеться як:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}t_i = 0. \quad (4)$$

(4) є рівнянням з 24-ма невідомими  $K_i$  – важелями векторів тяги м'язів.

Використаємо пару м'язів-антагоністів, до яких можна віднести горизонтальні прямі м'язи MRM та MRL. Дія антагоністів у первинній позиції погляду повинна бути врівноважена, тобто відповідні моменти обертання задовольняють умові [3]

$$\vec{M}t_{a1} = -\vec{M}t_{a2}. \quad (5)$$

І, оскільки кожен м'яз представлено трьома векторами, умова (5) насправді може бути записана як

$$\sum_{i=1}^3 \bar{M}t_{a1,i} = - \sum_{i=1}^3 \bar{M}t_{a2,i} \quad (6)$$

До умови (6) можна додати ще умови рівності нулю сум моментів сил відносно координатних осей:

$$\sum_{i=1}^n Mx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n My_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Mz_i = 0, \quad (7)$$

де

$$Mx_i = -Fy_i \cdot z_i + Fz_i \cdot y_i, \quad (8)$$

$$My_i = Fx_i \cdot z_i - Fz_i \cdot x_i, \quad (9)$$

$$Mz_i = -Fx_i \cdot y_i + Fy_i \cdot x_i, \quad (10)$$

та умову

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad (11)$$

Значить, для визначення важелів  $K_i$  отримаємо систему 6-ти лінійних рівнянь з 24-ма невідомими, тобто, система буде невизначеною.

Тепер, якщо треба повернути око так, щоб вершина рогівки ока, точка  $M_0$ , зайняла позицію точки  $M_1$ , треба створити момент обертання навколо осі, що перпендикулярна площині  $M_0OM_1$  (див рис 4). Тобто, маємо

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}t_i = OM_0 \times OM_1 \quad (12)$$

Алгоритм знаходження нових координат векторів сил тяги при обертаннях ока, побудовано на тому, що при обертаннях поверхні навколо нерухомого центра нові координати точок цієї поверхні в нерухомій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де  $A$  – матриця перетворення координат, вигляд якої залежить від того, яким чином визначено обертання [2].

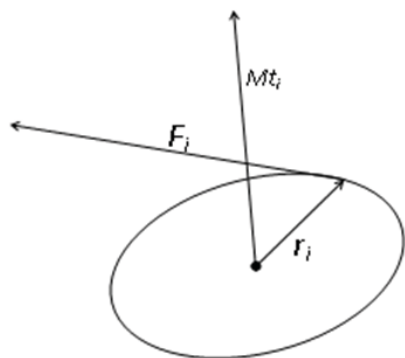


Рисунок 3 - Ось дії вектора тяги м'яза

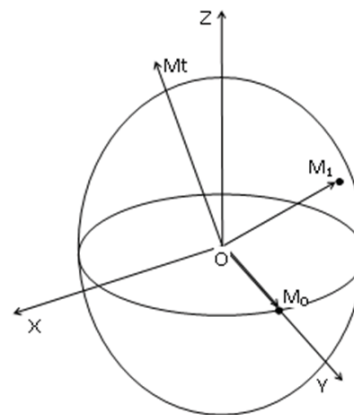


Рисунок 4 - Обертання ока від напрямку  $OM_0$  до напрямку  $OM_1$

Нові координати векторів сил тяги  $F'_i$  шукаємо за (1) з урахуванням нових координат  $r'_i$  та  $N'_i$ , знайденими за (13). Позицію рівноваги знову слід шукати для такої комбінації векторів  $F'_i$ , для яких виконуються умови, аналогічні (4)-(11), що приводить до вирішення системи лінійних рівнянь на новому кроці.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Про дію окоорухових м'язів на очне яблуко людини в первинній позиції погляду / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах, В. О. Мосьпан [та ін.] // Офтальмол. журн. – 2007. – №2. – С.50–56.
2. Ємченко В. І. Про дію окоорухових м'язів на очне яблуко людини при виведенні останнього з первинної позиції погляду / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах // Офтальмол. журн. – 2007. – № 5. – С.47–53.
3. Koene A. R. Eye Mechanics And Their Implications For Eye Movement Control / A. R. Koene // Helmholtz Instituut, 2002. – 123р.

Одержано 07.03.2009р.