УДК 517.5

Е.В. Дерец

О ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Одним из направлений теории приближений является изучение методов приближения интегралов. Наиболее распространенными в приложениях являются квадратурные формулы, позволяющие приближенно находить значение интеграла в виде линейной комбинации нескольких значений функции: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$. При этом функция f принадлежит некоторому классу функций. Экстремальная задача теории квадратур состоит в отыскании наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и вычислении её погрешности. Общая постановка экстремальной задачи теории квадратур и первые основополагающие результаты принадлежат С.М. Никольскому и А.Н. Колмогорову. Решению таких задач для различных классов функций посвящено большое количество работ (см., например, [1]-[4] и библиографию к ним).

В настоящей работе рассматриваются классы функций $W^r H_1^\omega$ $(r = 1, 2, \ldots)$, представляющие собой множество 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^\omega$, H_1^ω - множество 2π–периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f,t)_1 = \sup_{|h|\le t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \le \omega(t)$, $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Будем рассматривать квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) + R_n(f, \vec{c}_n, \vec{x}_n), \qquad (1)$$

где $\vec{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^{n}$, $c_k \in R$ - коэффициенты, $\vec{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^{n}$, $x_k \in [0, 2\pi)$ - узлы квадратурной формулы (1). Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе Ω называют величину

$$R_n(\Omega, \vec{c}_n, \vec{x}_n) = \sup_{f\in\Omega} \left| R_n(f, \vec{c}_n, \vec{x}_n) \right|.$$

Квадратурная формула с узлами $\vec{c}_n^{\,*}$ и коэффициентами $\vec{x}_n^{\,*}$ называется оптимальной на классе Ω, если

$$R_n(\Omega) = \inf_{\vec{c}_n, \vec{x}_n} R_n(\Omega, \vec{c}_n, \vec{x}_n) = R_n(\Omega, \vec{c}_n^{\,*}, \vec{x}_n^{\,*}).$$

Для $r = 1, 3, 5, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ и любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ в [5] найдена погрешность формулы прямоугольников $R_n\left(W^r H_1^{\omega}, \left\{\frac{2\pi}{n}\right\}, \left\{\frac{2k\pi}{n}\right\}\right)$ и доказано, что она является наилучшей для класса $W^1 H_1^{\omega}$. В [6], [7] для любого выпуклого $\omega(t)$ доказано, что наилучшей для классов $W^2 H_1^{\omega}$ и $W^3 H_1^{\omega}$ является формула прямоугольников.

В настоящей работе для $r = 4, 6, 8, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ и выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ найдена погрешность формулы прямоугольников на классе $W^r H_1^{\omega}$.

Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть $0 < h < \pi / n$, $-\pi / n < t_1 < \ldots < t_k < \pi / n - h$. Тогда для любой четной $2\pi / n$-периодической функции $f \in L_1$ справедливы неравенства

$$-\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \le \frac{1}{4n}\omega(f, 2h)_1 \tag{2}$$

$$-\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \le \frac{1}{4n}\omega(f, 2h)_1 + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt + (1-(-1)^k) \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \tag{3}$$

$$-\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \le \frac{1}{4n}\omega(f, 2h)_1 - 2\int_0^h f(t)dt + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt +$$

$$+(1-(-1)^{k+1}) \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \tag{4}$$

Лемма 1 является очевидным следствием леммы 1 в [5].

 ISSN 1562-9945

При каждом $n = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots$ обозначим $g_{n,r}(t) = (-1)^{[(r+1)/2]+1} D_r(nt)$, где $[\dots]$ - целая часть числа, $D_r(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mt - \pi r / 2)$ - функция Бернулли.

Лемма 2. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $r = 3, 5, 7, \dots$. Справедливы следующие неравенства

$$\left| g_{n,r}(a) - g_{n,r}(b) \right| \le g_{n,r}\left(|a - b| \right) \text{ для любых } a, b \in \left[0, \frac{\pi}{n} \right], \text{ таких что}$$

$$|a - b| \le \frac{\pi}{2n} \tag{5}$$

$$0 \le g_{n,r}(t) - g_{n,r}(\pi / n - t) \le \frac{1}{2} g_{n,r}(\pi / n - t) \quad \text{для всех } t \in \left[0, \frac{\pi}{2n} \right],$$

$$r = 5, 7, 9, \dots \tag{6}$$

$$0 \le g_{n,3}(t) - g_{n,3}(\pi / n - t) \le \frac{1}{2} g_{n,3}(\pi / n - t) \text{ для всех } t \in \left[\frac{\varsigma}{2}, \frac{\pi}{2n} \right], \tag{7}$$

где $\varsigma \in \left(0, \pi / (2n) \right)$ - нуль функции $D_4(nt)$.

Доказательство. Ясно, что $g_{n,r}(t) - g_{n,r}(\pi / n - t) = 2^{1-r} g_{n,r}(2t) \ge 0$ для всех $t \in \left[0, \pi / (2n) \right]$, откуда, принимая во внимание свойства функций Бернулли (см., например, [8, стр. 59-60]), получаем (5). Далее, как показано в [9], при любом $s = 1, 2, \dots$ $D_s(t) = \frac{\pi}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{-\mu s} \varphi_{s-1}\left(2^{\mu} t \right)$, где $\varphi_s(t)$ - s-й периодический интеграл, в среднем равный 0 на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, а тогда

$$g_{n,r}(t) - \frac{3}{2} g_{n,r}\left(\frac{\pi}{n} - t \right) = (-1)^{[(r+1)/2]+1} \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \varphi_{r-1}(nt) + \frac{5}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \varphi_{r-1}\left(2^{\mu} nt \right) \right) \le$$

$$\le (-1)^{[(r+1)/2]+1} \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \varphi_{r-1}(nt) + \frac{5}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} 2^{\mu} \varphi_{r-1}\left(nt \right) \right) \le 0 \text{ при любом } n = 1, 2, \dots,$$

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2n} \right]$, $r = 5, 7, 9, \dots$. Неравенство (7) может быть доказано непосредственной проверкой.

Основные результаты.

Теорема. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $r = 4, 6, 8, \dots$. Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$R_n\left(W^r H_1^{\omega}, \left\{ \tfrac{2\pi}{n} \right\}, \left\{ \tfrac{2k\pi}{n} \right\} \right) = \frac{2}{n^r} \int_0^{\xi} \omega'(2t) \left| D_r(nt) \right| dt,$$

где $\xi \in [0, \pi / n]$ - нуль функции Бернулли $D_r(nt)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.2.1 [10, стр.19],

$R_n\left(W^r H_1^\omega, \left\{\frac{2\pi}{n}\right\}, \left\{\frac{2k\pi}{n}\right\}\right) = 2\pi \sup\limits_{f \in W^r H_{1,n}^\omega} f(0)$, где $W^r H_{1,n}^\omega$ - множество $2\pi/n$-периодических функций $f(x) \in W^r H_1^\omega$ со средним значением 0 на периоде. Пусть $f(\omega, x)$ - $2\pi/n$-периодическая четная функция, определенная равенством

$$f(\omega, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}\omega'(2x), \textit{ если } x \in (0, \xi], \\ 0, \textit{ если } x \in (\xi, \pi / n] \end{cases}$$

Поскольку $f(\omega, x) \in H_1^\omega$, справедлива оценка

$$2\pi \sup_{f \in W^r H_{1,n}^\omega} f(0) = \frac{2}{n^r} \sup_{f \in H_{1,n}^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt \geq \frac{2}{n^r} \int_0^{2\pi} f(\omega, t) g_{n,r}(t) dt =$$

$$= \frac{2}{n^r} \int_0^{\xi} \omega'(2t) \left|D_r(nt)\right| dt$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f(\omega, t) g_{n,r}(t) dt \tag{8}$$

для любой $2\pi / n$-периодической функции $f(t) \in H_1^\omega$. Рассуждая аналогично [11, лемма 2], получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt \leq 2n \int_0^{\xi} g_{n,r-1}(t) \left(F(t) + F\left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right) dt +$$

$$+2n \int_H \left(g_{n,r-1}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) - g_{n,r-1}(t)\right) \cdot \left(L(t) - F(t)\right) dt + 2n \int_{\xi}^{\pi/n-\xi} g_{n,r-1}(t) \left(F(t) - F_*(t)\right) dt \tag{9}$$

где $F(t) = -\int_0^t f(\tau) d\tau$, $F_*(t) = \sup\limits_{0 \leq x \leq t \leq z \leq \pi/n} ((z - t)F(x) + (t - x)F(z)) / (z - x)$,

$L(t) = 2F_*\left(\pi / (2n)\right) - ((2n) / \pi) F_*\left(\pi / (2n)\right) t$,

$H = \left\{ t \in [\pi / n - \xi, \pi / n] : L(t) - F(t) > 0 \right\}$.

В случае, когда $\pi / n - \xi \notin H$, доказательство (8) аналогично [11]. Пусть $\pi / n - \xi \in H$. Возможны 3 случая

$\exists d \in (0, \pi / n - \xi) : L(t) - F(t) > 0$ при $t \in (d, \pi / n)$ и $F(d) = L(d)$.

$\exists \alpha \in [\pi / (2n), \pi / n - \xi)$, $\beta \in (\pi / n - \xi, \pi / n) : F(\alpha) - L(\alpha) = F(\beta) - L(\beta) = 0$ и $L(t) - F(t) > 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

 ISSN 1562-9945

$\exists \alpha \in [0, \pi/(2n)),\ \beta \in (\pi/n - \xi, \pi/n):\ F(\alpha) = F_*(\alpha),\ F(\beta) = F_*(\beta)$, $\forall t \in (\alpha, \beta)\ \ F(t) < F_*(t)$.

В случае (I) (8) следует из (9) и (3) (полагаем $k = 1$, $h = t$, $t_1 = d$). Пусть выполнены условия (II) или (III). Представим множество $H \bigcap \left(\beta, \pi/n\right)$ в виде объединения конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов $\bigcup\limits_{i \in J} (\alpha_i, \beta_i)$, и при каждом $t \in \left[0, \xi\right]$ оценим сверху $F(t) + F(\pi/n - t)$ с помощью леммы 1, включая в совокупность промежутков интегрирования $\left[\alpha_i, \alpha_i + 2t\right]$ и $\left[\beta_i - 2t, \beta_i\right]$, если $\beta_i - \alpha_i \ge 2t$; $\left[\alpha_i, \alpha_i + 2t\right]$, если $\alpha_i < \pi/n - t \le (\alpha_i + \beta_i)/2$; $\left[2\pi/n - 2t - \beta_i, 2\pi/n - \beta_i\right]$, если $(\alpha_i + \beta_i)/2 < \pi/n - t < \beta_i$; $\left[\alpha, \alpha + 2t\right]$ и $\left[\beta - 2t, \beta\right]$, если $\beta - \alpha \ge 2t$; $\left[-\alpha, 2t - \alpha\right]$, если $\alpha < t \le \min\left\{\xi, (\alpha + \beta)/2\right\}$ и либо $2t - \alpha \notin (\xi, \pi/n - \xi)$, либо $F_*(2t - \alpha) - F(2t - \alpha) < 2F_*(t) - 2F(t)$; $\left[\alpha, \alpha + 2t\right]$ если $\pi/n - t \le (\alpha + \beta)/2$; $\left[2\pi/n - 2t - \beta, 2\pi/n - \beta\right]$, если $(\alpha + \beta)/2 < \pi/n - t < \beta$ и либо $\eta(2\pi/n - 2t - \beta) < 2\eta(\pi/n - t)$, либо $2\pi/n - 2t - \beta \notin (\xi, \pi/n - \xi)$, где $\eta(t) = L(t) - F(t)$. При этом если при некотором t не было выбрано ни одного промежутка, то для таких t применяем (2), если выбран промежуток $\left[-\alpha, 2t - \alpha\right]$, то применяем (4), если же ни один из выбранных промежутков не содержит нуля, то используем оценку (3). В случае (II), применяя (5), после преобразований, аналогичных [11], получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t)\,dt \le \int\limits_0^{\xi} \omega'(2t) \left|D_r(nt)\right| dt + 2n \int\limits_{(\alpha+\beta)/2}^{(\pi/n - \xi + \beta)/2} \Big(2g_{n,r-1}(\pi/n - t) - g_{n,r-1}(t) -$$

$$-2g_{n,r-1}(\beta - t) - 4g_{n,r-1}(2t - \beta)\Big) \cdot \min\left\{\frac{1}{2}\eta(2t - \beta), \eta(t)\right\} dt.$$

В силу леммы 2 при любом $t \in \left[(\alpha + \beta)/2, (\pi/n - \xi + \beta)/2\right]$

$$2g_{n,r-1}(\pi/n - t) - g_{n,r-1}(t) - 2g_{n,r-1}(\beta - t) - 4g_{n,r-1}(2t - \beta) \le 2g_{n,r-1}(t) -$$

$-2g_{n,r-1}(2t - \beta) - 2g_{n,r-1}(\beta - t) \le 0$, откуда следует (8).

В случае (III) для доказательства (8) интегралы по промежуткам, не имеющим общих точек с $\left(\alpha, \beta\right)$, преобразуем аналогично [11], применяя при этом (5), а остальные интегралы оцениваем с помощью (5) и леммы 2.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность формулы прямоугольников на классе $W^r H_1^\omega$ при $r = 4,6,8,\ldots$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. Полученные результаты могут быть использованы для решения экстремальной задачи теории квадратур на классах $W^r H_1^\omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул–М.:Наука, 1974.
3. Моторный В.П. Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн.–1990 – Т. 42, вып.1.– С. 18 – 33.
4. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981 – Т. 36, №4. – С. 107 – 159.
5. Лигун А. А. Точное решение некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005 – № 6. – Вип. 10. – С. 64 –70.
6. Дерец Е.В. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^3 H_1^\omega$ // Вісн. Дніпропетр.ун-ту.Математика.–2004–№11–Вип.9.–С 37 – 40.
7. Дерец Е.В. Об оптимизации квадратурных формул для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Вісн. Дніпропетр.ун-ту. Математика. – 2005 – №6 – Вип. 10. – С. 43-57.
8. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения.–М., 1976.
9. Лигун А.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона для квадратурных формул / А.А. Лигун, В.Г. Доронин // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №1. – С. 46 – 51.
10. Моторный В. П. Некоторые экстремальные задачи теории квадратур и приближения функций // Дисс. … доктора физ.-мат. наук, Днепропетровск, 1974. – 112 с.
11. Дерец Е.В. О погрешности интервальной квадратурной формулы прямоугольников для класса $W^2 H_1^\omega$ // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8. – вип. 12. – С. 84 – 88.

Получено 01.03.2009г.