УДК 539.3

Ю.П. Глухов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РЕАКЦИИ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНІМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ. СЖИМАЕМЫЙ МАТЕРИАЛ

В данной статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1] исследовано влияние начальных напряжений и скорости движения поверхностной нагрузки на значения корней характеристических уравнений для слоистого сжимаемого полупространства.

§1. При решении пространственных задач об установившемся движении многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки с использованием интегрального преобразования Фурье представление решений зависит от корней характеристических уравнений трансформированных дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка, описывающих движение элементов многослойной среды. В случае однородного начального напряженного состояния

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_0^{\{s\}11} \neq S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33} \tag{1}$$

эти уравнения имеют вид

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}. \tag{2}$$

Здесь s - номер слоя. Подстилающее полупространство имеет номер $N+1$. В случае, если материал слоя - сжимаемый, то коэффициенты уравнения (2) можно представить в виде

$$a_0^{\{s\}} = c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}; \quad a_1^{\{s\}} = -k_1^2 \Big[c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} -$$

$$- c_{32}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - \mathrm{v}^2 \cos^2\phi \left(c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} \right) \Big] - k_2^2 \Big[c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} +$$

$$+ c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) - c_{31}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} \Big]; \quad a_2^{\{s\}} = k_1^4 \Big\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) +$$

$$+ c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - \mathrm{v}^2 \cos^2\phi \Big[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
&+c_{13}^{\{s\}2}\left(c_{31}^{\{s\}2}+c_{32}^{\{s\}2}\right)-d_{13}^{\{s\}2}\Big]\Big\}+k_2^4\Big\{c_{22}^{\{s\}2}\left(c_{21}^{\{s\}2}c_{33}^{\{s\}2}+c_{31}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{21}^{\{s\}2}c_{32}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}-\\
&-c_{21}^{\{s\}2}d_{23}^{\{s\}2}-\mathrm{v}^2\sin^2\phi\Big[c_{32}^{\{s\}2}\left(c_{21}^{\{s\}2}+c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{31}^{\{s\}2}\left(c_{22}^{\{s\}2}+c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{33}^{\{s\}2}\left(c_{21}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}\right)-\\
&-d_{23}^{\{s\}2}\Big]\Big\}+k_1^2k_2^2\Big[c_{11}^{\{s\}2}\left(c_{22}^{\{s\}2}c_{33}^{\{s\}2}+c_{32}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{21}^{\{s\}2}\left(c_{12}^{\{s\}2}c_{33}^{\{s\}2}+c_{32}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}\right)+\\
&+c_{31}^{\{s\}2}\left(c_{12}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}\right)-c_{11}^{\{s\}2}d_{23}^{\{s\}2}-c_{22}^{\{s\}2}d_{13}^{\{s\}2}-c_{33}^{\{s\}2}d_{12}^{\{s\}2}+2d_{12}^{\{s\}}d_{13}^{\{s\}}d_{23}^{\{s\}}+\\
&+\mathrm{v}^4\sin^2\phi\cos^2\phi\left(c_{31}^{\{s\}2}+c_{32}^{\{s\}2}+c_{33}^{\{s\}2}\right)\Big];\quad a_3^{\{s\}}=-k_1^6\Big[c_{11}^{\{s\}2}c_{12}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}-\\
&-\mathrm{v}^2\cos^2\phi\left(c_{11}^{\{s\}2}c_{12}^{\{s\}2}+c_{11}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}+c_{12}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}\right)+\mathrm{v}^4\cos^4\phi\left(c_{11}^{\{s\}2}+c_{12}^{\{s\}2}+c_{13}^{\{s\}2}\right)\Big]-\\
&-k_2^6\Big[\mathrm{v}^4\sin^4\phi\left(c_{21}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}+c_{23}^{\{s\}2}\right)-\mathrm{v}^2\sin^2\phi\left(c_{21}^{\{s\}2}c_{22}^{\{s\}2}+c_{21}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}\right)+\\
&+c_{21}^{\{s\}2}c_{22}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}\Big]-k_1^4k_2^2\Big\{c_{11}^{\{s\}2}\left(c_{12}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}\right)+c_{21}^{\{s\}2}c_{12}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}-c_{13}^{\{s\}2}d_{12}^{\{s\}2}-\\
&-\mathrm{v}^2\cos^2\phi\Big[c_{11}^{\{s\}2}\left(c_{22}^{\{s\}2}+c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{12}^{\{s\}2}\left(c_{21}^{\{s\}2}+c_{23}^{\{s\}2}\right)+c_{13}^{\{s\}2}\left(c_{21}^{\{s\}2}+c_{22}^{\{s\}2}\right)-d_{12}^{\{s\}2}\Big]\Big\}-\\
&-k_1^2k_2^4\Big[c_{22}^{\{s\}2}\left(c_{11}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}+c_{21}^{\{s\}2}c_{13}^{\{s\}2}\right)+c_{21}^{\{s\}2}c_{12}^{\{s\}2}c_{23}^{\{s\}2}-c_{23}^{\{s\}2}d_{12}^{\{s\}2}-\mathrm{v}^6\cos^2\phi\sin^4\phi\Big];
\end{aligned}\tag{3}$$

где

$\tilde{\rho}^{\{s\}}c_{ij}^{\{s\}2}=\tilde{\omega}_{ijji}^{\{s\}}$; $\tilde{\rho}^{\{s\}}d_{ij}^{\{s\}}=\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}}+\tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}$; k_1, k_2 - параметры двойного преобразования Фурье, v - скорость движения поверхностной нагрузки, ϕ - угол, который образует траектория движения нагрузки с положительным направлением оси абсцисс (нагрузка движется прямолинейно с постоянной скоростью), $\tilde{\rho}^{\{s\}}$ - плотность соответствующего элемента многослойной среды в естественном состоянии. Формулы для вычисления компонентов тензора $\tilde{\omega}$ для различных вариантов теорий конечных и малых начальных деформаций приведены в [1].

Так как уравнения (2) – бикубические алгебраические уравнения, то их решение можно получить классическим способом. Приведем уравнения (2) заменой

$$\eta^{\{s\}2}=\mu^{\{s\}2}-\frac{a_1^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}}}\tag{4}$$

к виду

$$\mu^{\{s\}6}+p^{\{s\}}\mu^{\{s\}2}+q^{\{s\}}=0,\tag{5}$$

где

$$p^{\{s\}}=-\frac{a_1^{\{s\}2}}{3a_0^{\{s\}2}}+\frac{a_2^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}};\quad q^{\{s\}}=\frac{2a_1^{\{s\}3}}{27a_0^{\{s\}3}}-\frac{a_1^{\{s\}}a_2^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}2}}+\frac{a_3^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}.$$

 ISSN 1562-9945

В случае, если дискриминант $\Delta^{\{s\}} = \dfrac{q^{\{s\}2}}{4} + \dfrac{p^{\{s\}3}}{27} = 0$, уравнения (5) при $p^{\{s\}} \neq 0,\ q^{\{s\}} \neq 0$ имеют один простой и один двукратный корень

$$\mu_1^{\{s\}2} = \frac{3q^{\{s\}}}{p^{\{s\}}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{3q^{\{s\}}}{2p^{\{s\}}}. \tag{6}$$

Если $\Delta^{\{s\}} \neq 0$, то уравнение (5) имеет три различных корня. При $\Delta^{\{s\}} > 0$ уравнения (6) имеют один действительный корень и два комплексных

$$\mu_1^{\{s\}2} = u_0^{\{s\}} + \mathrm{v}_0^{\{s\}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{u_0^{\{s\}} + \mathrm{v}_0^{\{s\}}}{2} \pm i\,\frac{(u_0^{\{s\}} - \mathrm{v}_0^{\{s\}})\sqrt{3}}{2}. \tag{7}$$

Здесь

$$u_0^{\{s\}} = \sqrt[3]{-\frac{q^{\{s\}}}{2} + \sqrt{\Delta^{[s]}}}; \quad \mathrm{v}_0^{\{s\}} = -\frac{p^{\{s\}}}{3u_0^{\{s\}}};$$

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ все три корня уравнения (5) будут действительными и различными

$$\mu_1^{\{s\}2} = 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right|\cos\frac{\phi^{\{s\}}}{3}; \quad \mu_2^{\{s\}2} = 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right|\cos\frac{\phi^{\{s\}} + 2\pi}{3};$$
$$\mu_3^{\{s\}2} = 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right|\cos\frac{\phi^{\{s\}} + 4\pi}{3}. \tag{8}$$

Здесь

$$\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right| = \left|\sqrt{-\frac{p^{\{s\}}}{3}}\right|; \quad \cos\phi^{\{s\}} = -\frac{q^{\{s\}}}{2r^{\{s\}}}.$$

Таким образом, при $\Delta^{\{s\}} = 0$ в случае ,если $p^{\{s\}} \neq 0$ и $q^{\{s\}} \neq 0$ и имеют разные знаки, уравнение (2) имеет два действительных двухкратных корня и два чисто мнимых. Если $p^{\{s\}} \neq 0$ и $q^{\{s\}} \neq 0$ и имеют одинаковые знаки, уравнение (2) имеет два действительных корня и два двухкратных чисто мнимых.

При $\Delta^{\{s\}} > 0$, если $\mu_1^{\{s\}2} > 0$ уравнение (2) имеет два действительных корня и четыре комплексных, если $\mu_1^{\{s\}2} < 0$ - шесть комплексных.

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ уравнение (2) имеет шесть различных корней. Действительные корни будут соответствовать положительным значениям корней уравнения (5) и определяться знаком тригонометрической функции в выражениях (8).

§2. Так как выражения (3) для коэффициентов уравнений (2) - довольно громоздкие выражения, аналитическое исследование корней характеристического уравнения представляется сложным. Численные исследования были проведены для сжимаемого материала с гармоническим потенциалом

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda s_1^2 + \mu s_2,$$

где λ, μ - постоянные Ламе. Величины s_1 и s_2 представляют собой первый и второй инварианты тензора деформаций линейной теории упругости, отнесенные к главным осям

$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1);$$
$$s_2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2.$$

Для теории конечных (больших) начальных деформаций и первого варианта малых начальных деформаций выражения для определения составляющих тензора $\tilde{\omega}$ при условии (1) имеют вид

$$\tilde{\omega}_{1111} = \frac{\lambda_1(\lambda + 2\mu)}{\lambda_2\lambda_3};\quad \tilde{\omega}_{2222} = \frac{\lambda_2(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1\lambda_3};\quad \tilde{\omega}_{3333} = \frac{\lambda_3(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1\lambda_2};$$

$$\tilde{\omega}_{1122} = \tilde{\omega}_{2211} = \frac{\lambda}{\lambda_3};\quad \tilde{\omega}_{1133} = \tilde{\omega}_{3311} = \frac{\lambda}{\lambda_2};\quad \tilde{\omega}_{2233} = \tilde{\omega}_{3322} = \frac{\lambda}{\lambda_1};$$

$$\tilde{\omega}_{1212} = \tilde{\omega}_{2121} = \frac{2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)};\quad \tilde{\omega}_{1313} = \tilde{\omega}_{3131} = \frac{\lambda_3\tilde{\omega}_{1212}}{\lambda_2};$$

$$\tilde{\omega}_{2323} = \tilde{\omega}_{3232} = \frac{\lambda_3\tilde{\omega}_{1212}}{\lambda_1};\quad \tilde{\omega}_{1221} = \frac{\lambda_1\left[(2\mu + \lambda)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + \lambda(\lambda_3 - 2)\right]}{\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

$$\tilde{\omega}_{2112} = \frac{\lambda_2^2\tilde{\omega}_{1221}}{\lambda_1^2};\quad \tilde{\omega}_{3113} = \frac{2\mu\left[\lambda_1 + (\lambda_3 - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)\right] + \lambda\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

$$\tilde{\omega}_{1331} = \frac{2\mu\left[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 1)\right] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

$$\tilde{\omega}_{2332} = \frac{2\mu\left[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - 1)\right] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

$$\tilde{\omega}_{3223} = \frac{2\mu\left[(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - \lambda_1\right] + \lambda\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Учтем, что $\lambda = \dfrac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$, где ν - коэффициент Пуассона, и пронормируем все величины по величине μ / ρ. Численные расчеты проводились для $\nu = 0,3$. Начальные удлинения менялись в

 ISSN 1562-9945

диапазоне от 0,8 до 1,2. Целью исследования была оценка возможных значений корней уравнения (2) и влияние начальных деформаций и скорости движения поверхностной нагрузки на значения корней характеристического уравнения (2) и соответственно на выбор решения исследуемой задачи.

Поверхность, соответствующая функции $\Delta^{\{s\}}$, при фиксированных значениях параметров $\lambda_i^{\{s\}}\left(i=1,2,3\right)$, v и ϕ имеет вид, показанный на рис.1. Причем форма поверхности не изменяется в диапазоне $0.8 \le \lambda_i^{\{s\}} \le 1.2$, $0 \le \mathrm{v}^2 \le c_{11}^{\{s\}2}$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Анализ численных значений $\Delta^{\{s\}}$ позволяет утверждать, что дискриминант уравнения (2) принимает в указанной области исследуемых параметров неотрицательные значения $\left(\Delta^{\{s\}} \ge 0\right)$.

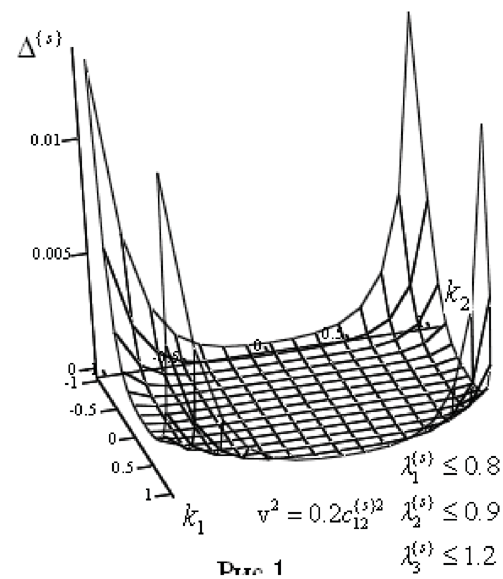

Рисунок 1

На рис. 2 и 3 проиллюстрировано влияние скорости и траектории движения нагрузки на значение дискриминанта уравнения (2). Как видно из рисунков начальные напряжения, скорость движения нагрузки и направление ее движения существенно влияют на значение функции $\Delta^{\{s\}}$. Очевидно, что при определенной скорости нагрузки влияние начальных напряжений уменьшается. От направления движения нагрузки зависит расположение области наименьшего влияния начальных напряжений.

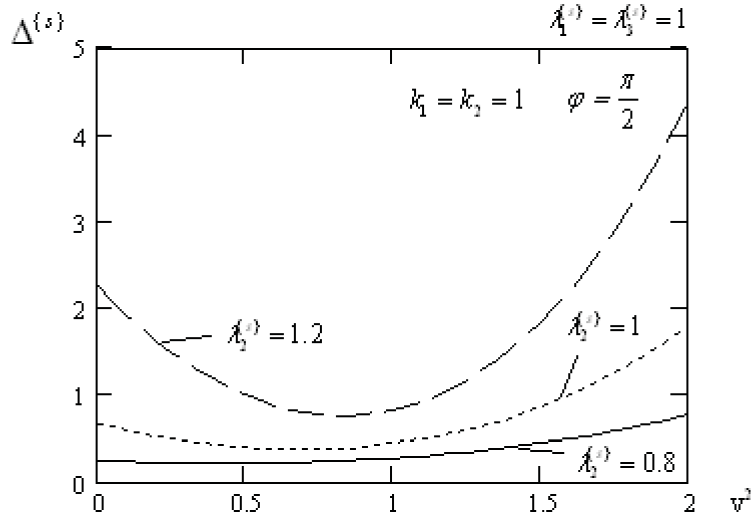

Рисунок 2

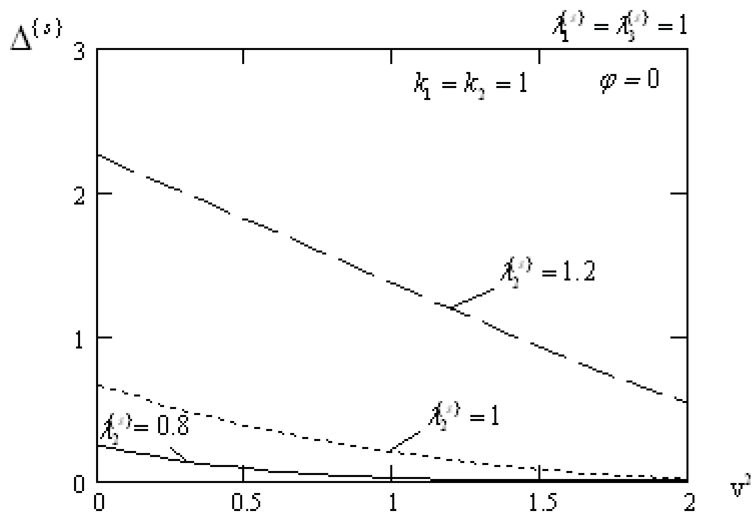

Рисунок 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.

Получено 28.02.2009г.