УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Введение. В данной статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойного предварительно напряженного полупространства. С помощью метода интегральных преобразований Фурье получено в общем виде фундаментальное решение задачи при различных условиях контакта и скоростях движения нагрузки.

§1. Рассмотрим слой толщиной h, лежащий на полупространстве. Слой и полупространство состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным. К свободной границе слоя приложена движущаяся с постоянной скоростью **v** нагрузка, вызывающая в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат $\left(y_1, y_2\right)$, где $y_1 = \xi_1 - \mathrm{v}t$; $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения слоя и полупространства через функцию $\chi\left(y_1, y_2\right)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^{\{s\}2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\left(\eta_2^{\{s\}2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad s, j = 1, 2. \qquad (1.1)$$

Индекс $s = 1$ соответствует слою, а $s = 2$ - полупространству. Корни $\eta_1^{\{s\}}$ и $\eta_2^{\{s\}}$ определяются из уравнения

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}}\eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0\,, \qquad (1.2)$$

где для сжимаемого тела

$$2A^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}\right)^2;$$

$$A_1^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right)\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right); \quad \tilde{\rho}^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

а для несжимаемого

$$2A^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\left(\tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}}\left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}}\right);$$

$$A_1^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2}\left(\tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right); \quad \tilde{q}_{tj}^{\{s\}} = \delta_{tj}\lambda_t^{\{s\}}q_t^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

$\rho^{\{s\}}$ — плотность материала полосы (полуплоскости) в естественном состоянии.

Рассмотрим следующие граничные условия:

при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}}\Big|_{y_2=0} = P_1\delta(y_1); \;\; \tilde{Q}_{22}^{\{1\}}\Big|_{y_2=0} = P_2\delta(y_1); \qquad (1.3)$$

и при $y_2 = -h$

$$u_2^{\{1\}}\Big|_{y_2=-h} = u_2^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h}; \;\; \tilde{Q}_{22}^{\{1\}}\Big|_{y_2=-h} = \tilde{Q}_{22}^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h}; \;\; \tilde{Q}_{21}^{\{1\}}\Big|_{y_2=-h} = \delta_1\tilde{Q}_{21}^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h};$$
$$\left(1-\delta_1\right)\tilde{Q}_{21}^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h} = \delta_1\left(u_1^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h} - u_1^{\{2\}}\Big|_{y_2=-h}\right). \qquad (1.4)$$

Здесь параметр $\delta_1 = 1$ соответствует случаю жесткого контакта между слоем и полупространством, а $\delta_1 = 0$ - случаю нежесткого (скользящего) контакта.

Перемещения и напряжения в формулах (1.3) и (1.4) через функции $\chi^{\{s\}(j)}$ $\left(s, j = 1,2\right)$ можно представить в виде

$$u_i^{\{s\}} = -\beta_{i1}^{(i)\{s\}}\frac{\partial^2\chi^{(i)\{s\}}}{\partial y_1\partial y_2} + \left(\beta_{i1}^{(j)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{(j)\{s\}}; \;\; i,j,s = 1,2; \;\; i \ne j;$$

$$\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \left(\alpha_{ij}^{(12)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(22)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{(2)\{s\}}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\alpha_{ij}^{(11)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(21)\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{(1)\{s\}}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}; \qquad (1.5)$$
$$i,j,s = 1,2;$$

где в случае сжимаемых тел

$$\alpha_{jj}^{(22)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}\right); \;\; \alpha_{jj}^{(12)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right);$$

$$\alpha_{mj}^{(21)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}\right); \;\; \alpha_{mj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right);$$

ISSN 1562-9945

$$\alpha_{jj}^{(21)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}};\ \ \alpha_{jj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) - \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}\right);$$

$$\alpha_{mj}^{(22)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};\ \ \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) - \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}\right);$$

$$\beta_{11}^{(1)\{s\}} = \beta_{21}^{(2)\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}};\ \ \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};\ \ \beta_{22}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}};$$

$$\beta_{11}^{(2)\{s\}} = \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2;\ \ \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2;\quad m, j = 1, 2;$$

а в случае несжимаемых тел

$$\alpha_{22}^{(12)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}\left(\tilde{\varkappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right);\ \ \alpha_{11}^{(12)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}\alpha_{22}^{(12)\{s\}};\ \ \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} = -\tilde{\varkappa}_{mj21}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1};$$

$$\alpha_{11}^{(22)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}-2}\tilde{\varkappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\varkappa}_{1111}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}\left(2\tilde{\varkappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\varkappa}_{1212}^{\{s\}}\right);\ \ \alpha_{22}^{(22)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}\tilde{\varkappa}_{1212}^{\{s\}};$$

$$\alpha_{22}^{(11)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-2}\left(\tilde{\varkappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\right) + \tilde{\varkappa}_{2222}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}\left(2\tilde{\varkappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\varkappa}_{1212}^{\{s\}}\right);$$

$$\alpha_{11}^{(11)\{s\}} = -\left(\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}\tilde{\varkappa}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\rho}^{\{s\}}\mathrm{v}^2\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}\right);\ \ \alpha_{11}^{(21)\{s\}} = \tilde{\varkappa}_{2112}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1};\ \ \alpha_{22}^{(21)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}\alpha_{11}^{(21)\{s\}};$$

$$\alpha_{mj}^{(22)\{s\}} = \tilde{\varkappa}_{mj12}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1};\ \ \alpha_{mj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\varkappa}_{mj21}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1};\ \ \alpha_{mj}^{(21)\{s\}} = -\tilde{\varkappa}_{mj12}^{\{s\}}\tilde{q}_{11}^{\{s\}-1};\ \ m, j = 1, 2;$$

$$\beta_{11}^{(1)\{s\}} = \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1};\ \ \beta_{21}^{(2)\{s\}} = \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1};\ \ \beta_{11}^{(2)\{s\}} = \beta_{22}^{(1)\{s\}} = 0.$$

В рассматриваемой задаче об установившейся реакции перемещения определяются с точностью до произвольной постоянной, поэтому будем в дальнейшем оперировать не с перемещениями, а со скоростями перемещений.

Таким образом, задача об установившейся реакции двухслойного сжимаемого полупространства при воздействии движущейся с постоянной скоростью нагрузки сводится к определению функций $\chi^{(j)}$ с помощью уравнений (1.1) при граничных условиях (1.3) и (1.4). Компоненты напряженно деформированного состояния двухслойного сжимаемого полупространства определяются по формулам (1.5).

§2. Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1. Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки. Решение преобразованных уравнений (1.1) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\begin{gathered}\chi^{\{s\}F(j)} = \left[1 - \delta_{j2}^{\{s\}}(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}})\right]\left\{C_1^{\{s\}(j)}\mathrm{e}^{k_1k\eta_1^{\{s\}}(y_2+\delta_{2s}h)} + \delta_{1s}C_3^{\{s\}(j)}\mathrm{e}^{-k_2k\eta_2^{\{s\}}(y_2+\delta_{2s}h)} + \right.\\ \left. + \left[1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(y_2 + \delta_{2s}h\right)\right]\left(C_2^{\{s\}(j)}\mathrm{e}^{k_2k\eta_2^{\{s\}}(y_2+\delta_{2s}h)} + \delta_{1s}C_4^{\{s\}(j)}\mathrm{e}^{-k_1k\eta_1^{\{s\}}(y_2+\delta_{2s}h)}\right)\right\};\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ $(j, m, s = 1, 2;\ \ m = \overline{1, 4})$ − постоянные интегрирования,

$$\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1 \neq \eta_2 \\ 1, & \eta_1 = \eta_2 \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}.$$

Введем постоянные интегрирования

$$C_m^{\{s\}(1)} = C_m^{\{s\}}; \;\; C_m^{\{s\}(2)} = i\gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}; \;\; C_{m+2}^{\{1\}(2)} = i\gamma_{3-m}^{\{1\}} C_{m+2}^{\{1\}}; \;\; s, m = 1, 2. \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в преобразованную систему уравнений (1.3) и (1.4), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$ $(m = \overline{1,4}; \; s = 1,2)$. Решение данной системы можно записать следующим образом

$$C_j^{\{s\}} = \frac{iP_1^F U_{j1}^{\{s\}} + P_2^F U_{j2}^{\{s\}}}{k^2 \Delta(k)}; \;\; j = \overline{1,4}; \;\; s = 1,2; \qquad (2.3)$$

где

$$U_{1m}^{\{1\}} = (-1)^n \left(a_{n2}D_{3456} - a_{n3}D_{2456} + a_{n4}D_{2356}\right); \; U_{2m}^{\{1\}} = (-1)^m \left(a_{n1}D_{3456} - a_{n3}D_{1456} + \right.$$
$$\left. + a_{n4}D_{1356}\right); \; U_{3m}^{\{1\}} = (-1)^n \left(a_{n1}D_{2456} - a_{n2}D_{1456} + a_{n4}D_{1256}\right); \; U_{4m}^{\{1\}} = (-1)^m \left(a_{n1}D_{2356} - \right.$$
$$\left. - a_{n2}D_{1356} + a_{n3}D_{1256}\right); \; U_{1m}^{\{2\}} = (-1)^n \left(a_{n1}D_{2346} - a_{n2}D_{1346} + a_{n3}D_{1246} - a_{n4}D_{1236}\right);$$
$$U_{2m}^{\{2\}} = (-1)^m \left(a_{n1}D_{2345} - a_{n2}D_{1345} + a_{n3}D_{1245} - a_{n4}D_{1235}\right); \;\; m, n = 1,2; \;\; m \neq n;$$
$$\Delta(k) = K_{12}D_{3456} - K_{13}D_{2456} + K_{14}D_{2356} + K_{23}D_{1456} - K_{14}D_{1356} + K_{34}D_{1256};$$
$$D_{ij\alpha\beta} = N_{ij}M_{\alpha\beta} - N_{i\alpha}M_{j\beta} + N_{i\beta}M_{j\alpha} + N_{j\alpha}M_{i\beta} - N_{j\beta}M_{i\alpha} + N_{\alpha\beta}M_{ij};$$
$$K_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}; \;\; N_{ij} = a_{3i}a_{4j} - a_{3j}a_{4i}; \;\; M_{ij} = a_{5i}a_{6j} - a_{5j}a_{6i}; \;\; i, j, \alpha, \beta = \overline{1,6};$$
$$a_{15} = a_{16} = a_{25} = a_{26} = 0; \; a_{11} = f_{21}^{\{1\}}; \; a_{12} = g_{21}^{\{1\}-}; \; a_{13} = f_{22}^{\{1\}}; \; a_{14} = g_{22}^{\{1\}-}; \; a_{21} = -f_{11}^{\{1\}};$$
$$a_{22} = -g_{11}^{\{1\}-}; a_{23} = f_{12}^{\{1\}}; a_{24} = g_{12}^{\{1\}+}; a_{31} = -f_{31}^{\{1\}}\mathrm{e}_1^{-\{1\}}; a_{32} = \left(w_{31}^{\{1\}} - g_{31}^{\{1\}-}\right)\mathrm{e}_2^{-\{1\}}; a_{33} = -f_{32}^{\{1\}}\mathrm{e}_2^{\{1\}};$$
$$a_{34} = \left(w_{32}^{\{1\}} - g_{32}^{\{1\}-}\right)\mathrm{e}_1^{\{1\}}; \; a_{35} = f_{31}^{\{2\}}; \; a_{36} = g_{31}^{\{2\}-}; \; a_{41} = a_{21}\mathrm{e}_1^{-\{1\}}; \; a_{42} = -\left(g_{11}^{\{1\}-} + w_{11}^{\{1\}}\right)\mathrm{e}_2^{-\{1\}};$$
$$a_{43} = a_{23}\mathrm{e}_2^{\{1\}}; a_{44} = \left(g_{12}^{\{1\}+} - w_{12}^{\{1\}}\right)\mathrm{e}_1^{\{1\}}; a_{45} = f_{11}^{\{2\}}; \; a_{46} = g_{11}^{\{2\}-}; a_{51} = -a_{11}\mathrm{e}_1^{-\{1\}}; \; a_{53} = -a_{13}\mathrm{e}_2^{\{1\}};$$
$$a_{52} = \left(w_{21}^{\{1\}} - g_{21}^{\{1\}-}\right)\mathrm{e}_2^{-\{1\}}; \; a_{54} = -\left(g_{22}^{\{1\}-} + w_{22}^{\{1\}}\right)\mathrm{e}_1^{\{1\}}; \; a_{55} = \delta_1 f_{21}^{\{2\}}; \; a_{56} = \delta_1 g_{21}^{\{2\}-};$$
$$a_{61} = -\delta_1 f_{41}^{\{1\}}\mathrm{e}_1^{-\{1\}}; \; a_{62} = \delta_1\left(w_{41}^{\{1\}} - g_{41}^{\{1\}+}\right)\mathrm{e}_2^{-\{1\}}; \; a_{63} = \delta_1 f_{42}^{\{1\}}\mathrm{e}_2^{\{1\}}; a_{64} = \delta_1\left(g_{42}^{\{1\}-} - w_{42}^{\{1\}}\right)\mathrm{e}_1^{\{1\}};$$
$$a_{65} = \delta_1 f_{41}^{\{2\}} - k\left(1 - \delta_1\right)f_{21}^{\{2\}}; \; a_{66} = \left\{\delta_1 b_{41}^{\{2\}} + k\left[\left(1 - \delta_1\right)b_{21}^{\{2\}} + \delta_1 c_{41}^{\{2\}}\right] - k^2\left(1 - \delta_1\right)c_{21}^{\{2\}}\right\};$$
$$g_{mj}^{\{s\}-} = kc_{mj}^{\{s\}} - b_{mj}^{\{s\}}; \;\; g_{mj}^{\{s\}+} = kc_{mj}^{\{s\}} + b_{mj}^{\{s\}}; \;\; f_{mj}^{\{s\}} = ka_{mj}^{\{s\}}; \;\; w_{mj}^{\{s\}} = kd_{mj}^{\{s\}}; \; m, j = \overline{1,6};$$
$$a_{1m}^{\{s\}} = \gamma_m^{\{s\}}\left(\gamma_{22}^{\{s\}(1m)} + (-1)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\gamma_{22}^{\{s\}(2m)}\right); \;\; a_{2m}^{\{s\}} = \gamma_{21}^{\{s\}(1m)} - (-1)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\gamma_m^{\{s\}2}\gamma_{21}^{\{s\}(2m)};$$

 ISSN 1562-9945

$$a_{3m}^{\{s\}} = \theta_2^{\{s\}(1m)} + \left(-1\right)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \varsigma_{21}^{(2m)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}; \;\; a_{4m}^{\{s\}} = \varsigma_{11}^{(1m)\{s\}} - \left(-1\right)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \theta_1^{\{s\}(2m)} \gamma_m^{\{s\}};$$

$$b_{3m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\varsigma_{21}^{(2m)\{s\}} + \left(-1\right)^m 2\varsigma_{22}^{(1m)\{s\}}\right); \;\; b_{4m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\beta_{11}^{(1)\{s\}} - 2\left(-1\right)^m \varsigma_{12}^{(22)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}\right);$$

$$b_{1m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[\gamma_m^{\{s\}} \left(\tau_{22}^{(1m)\{s\}} - \left(-1\right)^m \tau_{22}^{(2m)\{s\}}\right) - \gamma_{22}^{\{s\}(1m)}\right]; \;\; c_{1m}^{\{s\}} = (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \gamma_m^{\{s\}} \gamma_{22}^{\{s\}(1m)};$$

$$b_{2m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\tau_{21}^{(2m)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}2} + \left(-1\right)^m \tau_{21}^{(1m)\{s\}} - \gamma_m^{\{s\}} \gamma_{21}^{\{s\}(2m)}\right); \;\; c_{2m}^{\{s\}} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right) \gamma_{21}^{\{s\}(1m)};$$

$$d_{1m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \gamma_m^{\{s\}} \left(\gamma_{22}^{\{s\}(1m)} - \left(-1\right)^m \gamma_{22}^{\{s\}(2m)}\right); d_{2m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\gamma_m^{\{s\}2} \gamma_{21}^{\{s\}(2m)} + \left(-1\right)^m \gamma_{21}^{\{s\}(1m)}\right);$$

$$d_{3m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\theta_2^{\{s\}(1m)} - \left(-1\right)^m \gamma_m^{\{s\}} \varsigma_{21}^{(2m)\{s\}}\right); d_{4m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\varsigma_{11}^{(1m)\{s\}} + \left(-1\right)^m \gamma_m^{\{s\}} \theta_1^{\{s\}(2m)}\right);$$

$$c_{3m}^{\{s\}} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right) \theta_2^{\{s\}(1m)}; \;\; c_{4m}^{\{s\}} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right) \varsigma_{11}^{(1m)\{s\}}; \;\; \tau_{ij}^{(nm)\{s\}} = 2\alpha_{ij}^{(2n)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}};$$

$$\varsigma_{ij}^{(nm)\{s\}} = \beta_{ij}^{(n)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}; \;\; \gamma_{ij}^{\{s\}(nm)} = \alpha_{ij}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{ij}^{\{s\}(2n)} \gamma_m^{\{s\}2}; \;\; \theta_j^{\{s\}(nm)} = \beta_{j1}^{\{s\}(n)} - \beta_{j2}^{\{s\}(n)} \gamma_m^{\{s\}2};$$

$$\mathrm{e}_j^{-\{s\}} = \mathrm{e}^{-k\gamma_j^{\{s\}} \Delta h_s}; \;\; \mathrm{e}_j^{\{s\}} = \mathrm{e}^{k\gamma_j^{\{s\}} \Delta h_s}; \;\; \gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}; \;\; i, j, n, m, s = 1, 2.$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния слоя и полупространства (1.5) с учетом (2.3) можно представить в виде

$$\tilde{Q}_{mj}^{F\{s\}} = i^{1-\delta_{mj}} \frac{iP_1^F \Gamma_{mj}^{\{s\}(1)} + P_2^F \Gamma_{mj}^{\{s\}(1)}}{\Delta(k)}; \;\; \dot{u}_j^{F\{s\}} = \mathrm{v} i^{1-\delta_{1j}} \frac{\mathrm{v}\left(iP_1^F \Gamma_j^{\{s\}(1)} + P_2^F \Gamma_j^{\{s\}(2)}\right)}{\Delta(k)}; \tag{2.4}$$

$$m, j, s = 1, 2;$$

где

$$\Gamma_{jj}^{\{1\}(1)} = -k\gamma_1^{\{1\}} U_{11}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(21)}\right) \mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} + U_{21}^{\{1\}} \left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + \tau_{jj}^{(22)\{1\}} \gamma_2^{\{1\}} -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_{jj}^{(12)\{1\}} \gamma_2^{\{1\}}\right) + k\gamma_2^{\{1\}} \left[-\left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} y_2 + 1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right) \gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(22)}\right]\right\} \mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{1\}} y_2} +$$

$$+k\gamma_2^{\{1\}} U_{31}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(22)}\right) \mathrm{e}^{-k\gamma_2^{\{1\}} y_2} + U_{41}^{\{1\}} \left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \tau_{jj}^{(21)\{1\}} \gamma_1^{\{1\}} -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_{jj}^{(11)\{1\}} \gamma_1^{\{1\}}\right) + k\gamma_1^{\{1\}} \left[\left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right) \gamma_{jj}^{\{1\}(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} y_2 \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \gamma_{jj}^{\{1\}(21)}\right)\right]\right\} \mathrm{e}^{-k\gamma_1^{\{1\}} y_2};$$

$$\Gamma_{mj}^{\{1\}(n)} = -kU_{1n}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_1^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)}\right) \mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} - U_{2n}^{\{1\}} \left\{\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_2^{\{1\}} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)} - \tau_{mj}^{(12)\{1\}} -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_{mj}^{(22)\{1\}} \gamma_2^{\{1\}2}\right) + k\left[y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(12)} + \gamma_2^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)}\right) + \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right) \gamma_{mj}^{\{1\}(12)}\right]\right\} \mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{1\}} y_2} -$$

$$-kU_{3n}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(12)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_2^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)}\right) \mathrm{e}^{-k\gamma_2^{\{1\}} y_2} + U_{4n}^{\{1\}} \left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_1^{\{1\}} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)} + \tau_{mj}^{(11)\{1\}} -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_{mj}^{(21)\{1\}} \gamma_1^{\{1\}2}\right) + k\left[y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_1^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)} - \gamma_{mj}^{\{1\}(11)}\right) - \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right) \gamma_{mj}^{\{1\}(11)}\right]\right\} \mathrm{e}^{-k\gamma_1^{\{1\}} y_2};$$

$$\Gamma_1^{\{1\}(n)} = -kU_{1n}^{\{1\}} \left(\varsigma_{11}^{(11)\{1\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_1^{\{1\}} \theta_1^{\{1\}(21)}\right) \mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} - U_{2n}^{\{1\}} \left\{\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\beta_{11}^{(1)\{1\}} - 2\varsigma_{12}^{(22)\{1\}} \gamma_2^{\{1\}}\right) +\right.$$

$$+k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}y_2\left(\gamma_2^{\{1\}}\theta_1^{\{1\}(22)}+\varsigma_{11}^{(12)\{1\}}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right)\varsigma_{11}^{(12)\{1\}}\right]\Bigg\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{1\}}y_2}+kU_{3n}^{\{1\}}\left(\varsigma_{11}^{(12)\{1\}}-\right.$$

$$\left.-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\gamma_2^{\{1\}}\theta_1^{\{1\}(22)}\right)\mathrm{e}^{-k\gamma_2^{\{1\}}y_2}-U_{4n}^{\{1\}}\left\{\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\left(\beta_{11}^{(1)\{1\}}+2\varsigma_{12}^{(21)\{1\}}\gamma_1^{\{1\}}\right)+\right.$$

$$\left.+k\left[y_2\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\left(\gamma_1^{\{1\}}\theta_1^{\{1\}(21)}-\varsigma_{11}^{(11)\{1\}}\right)-\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right)\varsigma_{11}^{(11)\{1\}}\right]\right\}\mathrm{e}^{-k\gamma_1^{\{1\}}y_2};$$

$$\Gamma_1^{\{2\}(n)}=-kU_{1n}^{\{2\}}\left(\varsigma_{11}^{(11)\{2\}}+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\gamma_1^{\{1\}}\theta_1^{\{2\}(21)}\right)\mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{1\}}(y_2+h)}-U_{2n}^{\{2\}}\left\{\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(\beta_{11}^{(1)\{2\}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\varsigma_{12}^{(22)\{2\}}\gamma_2^{\{1\}}\right)+k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(y_2+h\right)\left(\varsigma_{11}^{(12)\{2\}}+\gamma_2^{\{1\}}\theta_1^{\{2\}(22)}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\right)\varsigma_{11}^{(12)\{2\}}\right]\right\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{1\}}(y_2+h)};$$

$$\Gamma_2^{\{1\}(n)}=kU_{1n}^{\{1\}}\left(\theta_2^{\{1\}(11)}-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\varsigma_{21}^{(21)\{1\}}\gamma_1^{\{1\}}\right)\mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{1\}}y_2}+U_{2n}^{\{1\}}\left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\left(2\varsigma_{22}^{(12)\{1\}}+\varsigma_{21}^{(22)\{1\}}\right)+\right.$$

$$\left.+k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}y_2\left(\theta_2^{\{1\}(12)}-\varsigma_{21}^{(22)\{1\}}\gamma_2^{\{1\}}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right)\theta_2^{\{1\}(12)}\right]\right\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{1\}}y_2}+kU_{3n}^{\{1\}}\left(\theta_2^{\{1\}(12)}+\right.$$

$$\left.+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\varsigma_{21}^{(22)\{1\}}\gamma_2^{\{1\}}\right)\mathrm{e}^{-k\gamma_2^{\{1\}}y_2}+U_{4n}^{\{1\}}\left\{k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}y_2\left(\theta_2^{\{1\}(11)}+\varsigma_{21}^{(21)\{1\}}\gamma_1^{\{1\}}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\right)\theta_2^{\{1\}(11)}\right]+\right.$$

$$\left.+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}}\left(2\varsigma_{22}^{(11)\{1\}}-\varsigma_{21}^{(21)\{1\}}\right)\right\}\mathrm{e}^{-k\gamma_1^{\{1\}}y_2};$$

$$\Gamma_{jj}^{\{2\}(n)}=U_{1n}^{\{2\}}k\gamma_1^{\{2\}}\left(-\gamma_{jj}^{\{2\}(11)}+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\gamma_{jj}^{\{2\}(21)}\right)\mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{2\}}(y_2+h)}+U_{2n}^{\{2\}}\left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left[\gamma_{jj}^{\{2\}(12)}+\gamma_2^{\{2\}}\left(\tau_{jj}^{(22)\{s\}}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\tau_{jj}^{(12)\{s\}}\right)\right]+k\gamma_2^{\{2\}}\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(y_2+h\right)\left(\gamma_{jj}^{\{2\}(22)}-\gamma_{jj}^{\{2\}(12)}\right)-\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\right)\gamma_{jj}^{\{2\}(12)}\right]\right\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{2\}}(y_2+h)};$$

$$\Gamma_{mj}^{\{2\}(n)}=-kU_{1n}^{\{2\}}\left(\gamma_{mj}^{\{2\}(11)}+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\gamma_1^{\{2\}2}\gamma_{mj}^{\{2\}(21)}\right)\mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{2\}}(y_2+h)}+U_{2n}^{\{2\}}\left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(\gamma_{mj}^{\{2\}(22)}\gamma_2^{\{2\}}-\tau_{mj}^{(12)\{2\}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\tau_{mj}^{(22)\{2\}}\gamma_2^{\{2\}2}\right)-k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(y_2+h\right)\left(\gamma_{mj}^{\{2\}(12)}-\gamma_2^{\{2\}2}\gamma_{mj}^{\{2\}(22)}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\right)\gamma_{mj}^{\{2\}(12)}\right]\right\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{2\}}(y_2+h)};$$

$$\Gamma_2^{\{2\}(n)}=kU_{1n}^{\{2\}}\left(\theta_2^{\{2\}(11)}-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\varsigma_{21}^{(21)\{2\}}\gamma_1^{\{2\}}\right)\mathrm{e}^{k\gamma_1^{\{2\}}(y_2+h)}+U_{2n}^{\{2\}}\left\{-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(2\varsigma_{22}^{(12)\{2\}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varsigma_{21}^{(22)\{2\}}\right)+k\left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\left(y_2+h\right)\left(\theta_2^{\{2\}(12)}-\varsigma_{21}^{(22)\{2\}}\gamma_2^{\{2\}}\right)+\left(1-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{2\}}\right)\theta_2^{\{2\}(12)}\right]\right\}\mathrm{e}^{k\gamma_2^{\{2\}}(y_2+h)};$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния определяются согласно (2.4) с учетом значений корней характеристического уравнения (1.2) и условий контакта (1.5) и (1.6).

Для того, чтобы перейти в формулах (2.4) к оригиналам следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.

Получено 20.02.2009г.