УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, А.Б. Кулик, В.Ф. Лазар

К ТЕОРИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ БЕЗ УЧЕТА СИЛ ТРЕНИЯ

В настоящее время для плоской контактной задачи для упругой полосы без начальных напряжений получены результаты по широкому кругу вопросов, которые достаточно полно отражены в [1, 2].

В работе [3] рассмотрена плоская контактная задача для жесткого штампа, действующего без трения на упругую предварительно напряженную полосу, лежащую на жестком основании. При этом использовались общие решения плоских статических линеаризированных задач, построенных в работах академика НАН Украины А.Н. Гузя для равных и неравных корней определяющего (характеристического) уравнения. Здесь же исследования для полосы выполнены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых материалов при произвольной структуре упругого потенциала. В результате контактная задача для полосы с начальными напряжениями сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром, если начальные напряжения не достигают значений, соответствующих потери устойчивости полосы.

В работе [3] получено явное выражение для функции $g(\alpha,\lambda_i)$, которая зависит от начальных напряжений и входит в ядро интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Как следует из [3], функция $g(\alpha,\lambda_i)$ стремится к бесконечности соответственно для равных и неравных корней характеристического (определяющего) уравнения при выполнении условий

$$(1+m_1)l_1\lambda_2\omega_1+(1+m_2)(l_1-l_2)\sqrt{n_1}\sinh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_1}}\cosh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_1}}=0, \qquad (1)$$

 ISSN 1562-9945

$$l_1\sqrt{n_1}\cosh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_1}}\sinh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_2}}-l_2\sqrt{n_2}\cosh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_2}}\sinh\frac{\lambda_2\omega_1}{\sqrt{n_1}}=0;\quad \omega_1=\alpha h. \quad (2)$$

Здесь и далее все обозначения совпадают с обозначениями [3].

Можно показать, что если в (1) и (2) ввести обозначения, принятые в работах [4, 5], то уравнения (1) и (2) совпадают с характеристическими уравнениями [4, 5], соответствующими задаче об устойчивости полосы при рассматриваемом виде нагружения $(s_{11}^0 \neq 0;\, s_{22}^0 = 0;\, \lambda_1 \neq \lambda_2;\, s_{33}^0 \neq 0;)$.

Таким образом, для ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода необходимо определить критические значения параметров предварительного нагружения в зависимости от коэффициентов удлинений (λ_i) при которых ядро терпит разрыв.

В связи с последним в данной работе определим критические параметры нагружения полосы (полуплоскости). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу о поверхностной неустойчивости полуплоскости ($y_2 < 0$) с начальными напряжениями при сжатии вдоль оси Oy_1 $(s_{22}^0 = 0)$ в случае равных и неравных корней определяющего уравнения.

Поскольку граница полуплоскости $y_2 = 0$ ($z_1 \equiv z_2 = 0$) не загружена, то

$$\tilde{Q}_{21}\Big|_{z_1=0} = 0;\quad \tilde{Q}_{22}\Big|_{z_1=0} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнений Лапласа выбираем в форме

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)e^{-\alpha(z_1+iy_1)}d\alpha;$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} B(\alpha)e^{-\alpha(z_1+iy_1)}d\alpha. \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям и учитывая соотношения (1) и (2), после преобразований получаем уравнение, соответствующее поверхностной неустойчивости полуплоскости с начальными напряжениями в виде

$$l_1 - l_2 = 0. \quad (5)$$

Аналогичное уравнение для полуплоскости с начальными напряжениями в случае неравных корней определяющего уравнения получаем в форме

$$l_1\sqrt{n_1} - l_2\sqrt{n_2} = 0 \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) получаются из (1) и (2), если в соответствующие выражения устремить $\omega_1 = \alpha h$ к бесконечности, т.е. рассмотреть случай сколько угодно толстой полосы. Рассмотрим пример для несжимаемой полосы (полуплоскости) с потенциалом Трелоара (тело неогуковского типа) и Бартенева–Хазановича. Для потенциала Трелоара $n_1 \neq n_2$, а для потенциала Бартенева–Хазановича $n_1 = n_2$. Для постоянных n_i, m_i, l_i $(i = 1,2)$ в рамках плоской деформации с учетом того, что в начальном состоянии имеет место также плоская деформация, т.е. $\lambda_1\lambda_2 = 1\,(\lambda_3 = 1)$, для равных и неравных корней соответственно имеем выражения

$$\begin{gathered} n_1 = n_2 = \lambda_1^{-2}; \quad m_1 = \lambda_1^{-2}; \quad m_2 = 1; \\ l_1 = \lambda_1^2; \quad l_2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2); \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} n_1 = 1; \quad n_2 = \lambda_1^{-4}; \quad m_1 = 1; \quad m_2 = \lambda_1^{-4}; \\ l_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1^4); \quad l_2 = 2\lambda_1^4(1 + \lambda_1^4)^{-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя(7), (8) в уравнение (1) и (2), после ряда преобразований получим

$$(1 + \lambda_1^2)\,\omega_1 + (3\lambda_1^2 - 1)\sinh\omega_1\cosh\omega_1 = 0\,, \tag{9}$$

$$(1 + \lambda_1^4)^2\cosh(\lambda_1^{-1}\omega_1)\sinh(\lambda_1\omega_1) - 4\lambda_1^2\cosh(\lambda_1\omega_1)\sinh(\lambda_1^{-1}\omega_1) = 0\,. \tag{10}$$

Если в (10) ввести обозначения [4], то последнее уравнение совпадает с характеристическим уравнением [4, с.177, ф-ла (VIII.6)]. Подстановки (7) и (8) в (5) , (6) приводят к уравнениям

$$3\lambda_1^2 - 1 = 0\,, \tag{11}$$

$$\lambda_1^8 + 2\lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + 1 \equiv (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1) = 0\,. \tag{12}$$

Уравнения (11), (12) имеют корни соответственно $\lambda_1^{кр} \approx 0,58$ $\lambda_1^{кр} \approx 0,54$.

Таким образом, для несжимаемого тела в условиях плоской деформации явление поверхностной неустойчивости полуплоскости с начальными напряжениями наступает для потенциала Трелоара при $\lambda_1^{кр} \approx 0,54$ и для потенциала Бартенева–Хазановича при $\lambda_1^{кр} \approx 0,58$.

 ISSN 1562-9945

Не трудно показать, что уравнение (9) при $0,58 < \lambda_1 < \infty$ и уравнение (10) при $0,54 < \lambda_1 < \infty$ не имеют действительных корней, кроме корня $\alpha = 0$. Следовательно, как и в случае [6-8], контактную задачу для полосы с начальными напряжениями можно свести к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным ядром, если начальные напряжения не достигают значений, соответствующих потери устойчивости полосы.

Для получения численной информации о влиянии начальных напряжений на распределение контактного давления в случае потенциалов Трелоара (неравные корни) и Бартенева–Хазановича (равные корни) необходимо иметь приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма.

Таким образом, имеет смысл рассматривать только такие начальные напряжения, которые не вызывают появление поверхностной неустойчивости полосы (полуплоскости), так как вблизи значений начального состояния, отвечающего поверхностной неустойчивости полосы (полуплоскости), происходит неограниченный рост напряжений и перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. –М.: Наука, 1974. –455с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР.–М.:Наука, 1976. –493с.
3. Бабич С.Ю. О контактной задаче для упругой полосы с начальными напряжениями // Прикладная механика. –1984.–20,№12. –с.34-38.
4. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наукова думка, 1973. –272с.
5. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наукова думка, 1979. –144с.
6. Бабич С.Ю. Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями // Прикладная механика. –1984. –20, №6. –с.34-40
7. Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Овсиенко В.Г. К теории контактной задачи кручения упругого сжимаемого слоя с начальными напряжениями. // Системні технології: Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008. –с.106-110
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. –403с.

Получено 09.02.2009г.