УДК 539.3

Г.И. Щурук

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Введение. Задачам гидроупругости для идеальной жидкости посвящено большое число публикаций. Однако расчеты, проведенные в рамках модели идеальной жидкости, часто не удовлетворяют все возрастающим требованиям точности. При выборе конкретной модели, адекватно описывающей реальные жидкостные наполнители, необходимо рассматривать модель вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости. В связи с этим в данной работе проводится анализ закономерностей волнового процесса в ортотропной оболочке с жидкостью в рамках модели линеаризированных уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости. Ведь замена линеаризированных уравнений Навье-Стокса на линейные уравнения Эйлера настолько изменяет структуру дифференциальных уравнений, что делает невозможным качественное и количественное исследование ряда явлений, присущих реальным жидкостям. В случае высокочастотных волновых процессов в оболочке из композитных материалов с пониженной сдвиговой жесткостью целесообразно использовать теорию оболочек типа С.П.Тимошенко. Необходимость применения этой модели обусловлена также тем, что получающиеся в ее рамках уравнения движения являются уравнениями гиперболического типа, позволяющие в полной мере исследовать волновые процессы.

В настоящей статье рассматривается общая неосесимметричная задача о распространении волн в ортотропной оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. При исследовании применяются представления общих решений линеаризированных уравнений Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости. Движение оболочки описано линейными уравнениями теории оболочек типа С.П.Тимошенко.

 ISSN 1562-9945

Метод решения. Рассмотрим процесс распространения неосесимметричных гармонических волн в бесконечной ортотропной цилиндрической оболочке радиуса R и толщины $2h$, заполненной покоящейся вязкой сжимаемой жидкостью. Воспользуемся круговой цилиндрической системой координат (z, r, θ), совместив ось z с осью оболочки. Используем линейные уравнения теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1] и линеаризированные уравнения Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости [2]. В рамках этих моделей система уравнений, описывающая совместные колебания гидроупругой системы, в цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$L\vec{u} = \vec{q}\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{\upsilon} + \frac{1}{\rho_0^*} \operatorname{qrad} p - \frac{\nu^*}{3} \operatorname{qrad} \operatorname{div} \vec{\upsilon} = 0\,;$$

$$\frac{1}{\rho_0^*}\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\upsilon} = 0\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \mathrm{const}\;;$$

$$\dot{u}_z = \upsilon_z;\ \dot{u}_r = \upsilon_r;\ \dot{u}_\theta = \upsilon_\theta;\ q_z = -p_{rz};\ q_r = -p_{rr};\ q_\theta = -p_{r\theta}; \tag{3}$$

$$p_{rz} = \mu^* \left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r} + \frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} \right); p_{rr} = -p + \lambda^* \left(\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} + \frac{\upsilon_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}$$

$$p_{r\theta} = \mu^* \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\upsilon_\theta}{r} \right). \tag{4}$$

Здесь в уравнениях (1): L –матрица дифференциальных операторов теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1]; $\vec{u} = \vec{u}(u_z, u_r, u_\theta)$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\vec{q}$ – вектор усилия внешней нагрузки, приведенный к серединной поверхности оболочки. В уравнениях (2-4): $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости частиц жидкости; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0^* и a_0 -плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; ν^*, μ^* – кинематический и динамический коэффициенты вязкости; для второго коэффициента вязкости λ^* принято соотношение $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$; $p_{rz}, p_{rr}, p_{r\theta}$ – составляющие тензора напряжений в жидкости. Уравнения (3) – соответственно кинематические и динамические граничные условия, которые, в силу тонкостенности оболочки, будем удовлетворять на серединной поверхности ($r = R$). Соотношения (1)–(4) представляют замкнутую систему соотношений гидроупругости для ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Для решения этой системы соотношений используем представления общих решений линеаризированных уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат через скалярные потенциалы ψ, χ_1 и χ_2, которые определяются из трех независимых уравнений [2]

$$\left[\left(1+\frac{4}{3}\frac{\nu^*}{a_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi=0\,;\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu^*\Delta\right)\chi_i=0\,,\ \left(i=1,2\right). \qquad (5)$$

Т.е. в случае цилиндрических координат система пяти уравнений (2) сводится к решению трех скалярных независимых уравнений второго порядка (5), определяющих потенциалы скорости ψ, χ_1 и χ_2. При этом задача гидроупругости для ортотропной оболочки типа С.П.Тимошенко , содержащей покоящуюся вязкую сжимаемую жидкость, сводится к решению системы уравнений (1), (5) с учетом кинематических и динамических граничных условий на срединной поверхности (3), где составляющие тензора напряжений в жидкости p_{ri} также выражаются через потенциалы.

Рассмотрим гармоническую синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль оси оболочки вида

$$\left\{u_r, u_z, \varphi_z, \psi, \chi_2\right\} = \left\{u_1^0, u_3^0, u_5^0, f_1(r), f_3(r)\right\}\exp\left[i\left(kz-\Omega\,t\right)\right]\cos n\theta\,,$$

$$\left\{u_\theta, \varphi_\theta, \chi_1\right\} = \left\{u_2^0, u_4^0, f_2(r)\right\}\exp\left[i\left(kz-\Omega\,t\right)\right]\sin n\theta\,, \qquad (6)$$

где $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, u_5^0, f_1, f_{2,} f_3 -$ амплитуды волн; $\varphi_{z,} , \varphi_\theta -$ углы поворота нормали; $n -$ количество волн по окружности поперечного сечения оболочки; $k = k_1 + ik_2 -$ волновое число; $\Omega -$ частота.

На первом этапе решения задачи определяем составляющие внешней нагрузки q_z, q_θ, q_r, действующей со стороны жидкости на оболочку, через амплитудные постоянные u_j^0. При этом $f_j(r)$ в выражениях (6) определяются из соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и выражаются через функции Бесселя от комплексного аргумента $f_j(r) = A_j J_n(\eta_j r), \left(j = \overline{1,3}\right)$, где $\eta_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{a_0^2}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\nu^*}{a_0^2} i\Omega\right)^{-1} - k^2}$; $\eta_2 = \eta_3 = \sqrt{i\frac{\Omega}{\nu^*} - k^2}$, а A_j определяются из кинематических условий через амплитудные постоянные u_j^0.

На втором этапе с помощью представлений решений (6) в результате обычной процедуры получаем трансцендентное дисперсионное уравнение

$$\det = \left\|\alpha_{ij}\right\| = 0; \quad (i.j = \overline{1,5}), \tag{7}$$

где $\alpha_{11} = \frac{b_1\Omega^2}{\varepsilon_1 c^2} + b_2 + \frac{b_2 n^2}{\varepsilon_2} - b_1\Omega^2 - \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{1m}\gamma_{m1}$

$$\alpha_{12} = b_2 n\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) - \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{1m}\gamma_{m2}; \; \alpha_{13} = b_{12} i\frac{\Omega}{c} - \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{1m}\gamma_{m3}; \; \alpha_{14} = -\frac{b_2 n}{\varepsilon_2};$$

$$\alpha_{15} = -\frac{ib_1\Omega}{c\varepsilon_1}; \; \alpha_{21} = -b_2 n\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) + \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{2m}\gamma_{m1};$$

$$\alpha_{22} = b_1\Omega^2 - \frac{b_2}{\varepsilon_2} - b_2 n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{2m}\gamma_{m2}; \; \alpha_{23} = -\frac{i\Omega n}{c}\left(1 + b_{12}\right) + \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{2m}\gamma_{m3};$$

$$\alpha_{24} = \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \; \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = \alpha_{53} = 0; \; \alpha_{31} = b_{12} i\frac{\Omega}{c} - \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{3m}\gamma_{m1};$$

$$\alpha_{32} = -\frac{i\Omega n}{c}\left(1 + b_{12}\right) + \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{3m}\gamma_{m2}; \; \alpha_{33} = b_1\Omega^2 - n^2 - b_1\frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{b_1}{k_0} i\Omega\beta_{3m}\gamma_{m3};$$

$$\alpha_{41} = -\frac{ib_1\Omega}{c\varepsilon_1}; \; \alpha_{44} = -\frac{i\Omega n k_0^2}{12c}\left(1 + b_{12}\right); \tag{8}$$

$$\alpha_{45} = \frac{k_0^2}{12}\left(b_1\Omega^2 - n^2 - b_1\frac{\Omega^2}{c^2}\right) - \frac{b_1}{\varepsilon_1}; \; \alpha_{51} = \frac{b_2 n}{\varepsilon_2}; \; \alpha_{52} = \frac{b_2}{\varepsilon_2};$$

$$\alpha_{54} = \frac{k_0^2}{12}\left(b_1\Omega^2 - b_2 n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2}\right) - \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \; \alpha_{55} = -\frac{i\Omega n k_0^2}{12c}\left(1 + b_{12}\right) \qquad \left(m = \overline{1,3}\right);$$

$$b_l = \frac{E_l}{G_{12}\left(1 - \nu_{12}\nu_{21}\right)}, \; \varepsilon_l = \frac{E_l}{k' G_{13}\left(1 - \nu_{12}\nu_{21}\right)}, \; \left(l = 1,2\right); \; b_{12} = b_1\nu_{21} = b_2\nu_{12};$$

$$k_0 = \frac{2h}{R}.$$

Здесь c –фазовая скорость; E_i, G_{ik} –модули упругости при растяжении и сдвиге; ν_{il} – коэффициенты Пуасона; k' – коэффициент сдвига. Величины $\beta_{im}\gamma_{mj}$, входящие в дисперсионное уравнение (7), (8), характеризуют влияние вязкой жидкости на распространение упругих волн в оболочке. Они содержат все жидкостные параметры (плотность, вязкость, ...), а также функции Бесселя n-го порядка первого рода от комплексного аргумента и приведены в работе [3].

Дисперсионное уравнение (7) является многопараметрическим трансцендентным уравнением и описывает процесс распространения неосесимметричных волн в исследуемой гидроупругой системе.

Анализ результатов. Уравнение (7) позволяет исследовать влияние многих параметров оболочки и характеристик жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания волн в системе. Ограничимся исследованием влияния на дисперсионные кривые такой характеристики жидкой среды, как ее вязкость.

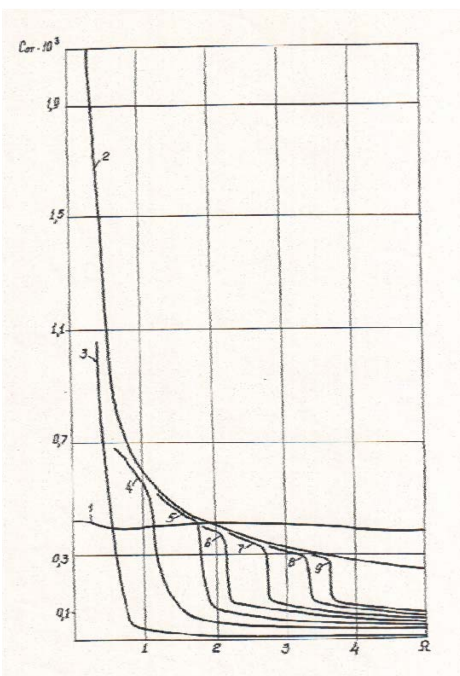

Рисунок 1

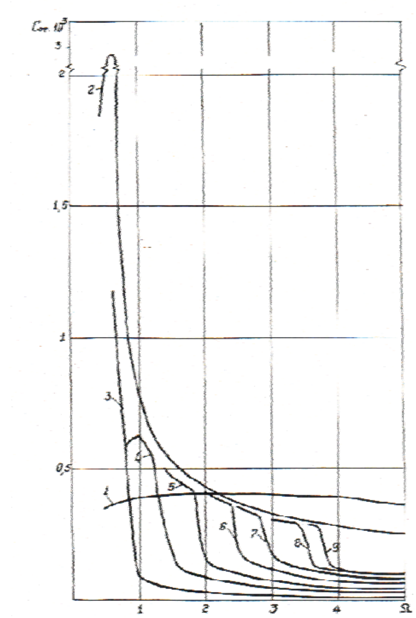

Рисунок 2

На рис.1,2 представлены результаты численного исследования влияния вязкости жидкости на фазовые скорости системы в случае $n=1$ и $n=2$ соответственно. Эти графики отображают зависимость относительного изменения фазовой скорости $c_{от} = \dfrac{c_и - c_в}{c_и}$ ($c_и$ – значения фазовой скорости волн, распространяющихся в оболочке с идеальной жидкостью, $c_в$– соответствующие значения фазовой скорости волн, распространяющихся в системе оболочка-вязкая жидкость) от частоты Ω для системы боропластиковая оболочка-глицерин. Из рисунков видно, что вязкость жидкости понижает значения фазовых скоростей всех мод, а также влияет на критические частоты этих мод. Также ее влияние существенно в областях низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец Р.К., Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости // Мат. методы и физ.-мех. поля. –Киев: Наук. думка. –1975.-Вып.I.-С.135-140.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения.- Киев: Наук. думка, 1986.-536с.
3. Гузь А.Н. . Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. – 1980. – 16, №10. – С.10-20.

Получено 05.02.2009г.