

О ПОСТРОЕНИИ КАРКАСА ИЗОБРАЖЕНИЯ**Вступление.**

Каркасом изображения будем называть сеть, множество узлов которой, совпадает с пикселями исходного изображения. Каркасы изображения используются в задачах ресемплинга (геометрического изменения размеров) изображений (см.[1]), анализа данных аэрокосмической фотосъемки с целью выявления объектов нитевидной структуры (см.[2], [3]) и пр. Такого рода задачи возникают при удаленном зондировании земной поверхности, в частности при мониторинге состояния окружающей среды. При построении каркаса, отрезок прямой, проходящий через узел, определяет направление (вектор), характеризующее поведение изображения в данной точке. В данной работе предложена конструкция каркаса, каждому узлу которого поставлены в соответствие 4 числа: величины и направления ее главных кривизн.

Теоретические предпосылки.

Для решения этой задачи использовались элементы дифференциальной геометрии, касающиеся построения индикатрисы Дюпена. Одним из свойств индикатрисы Дюпена является следующее: квадрат любого ее радиус-вектора дает абсолютное значение радиуса кривизны того нормального сечения, для которого данный радиус-вектор является касательной. Индикатриса Дюпена дает наглядное представление об изменении величины радиуса кривизны при вращении нормального сечения вокруг нормали к поверхности. В эллиптическом случае индикатриса Дюпена - есть эллипс, в гиперболическом – две сопряженные гиперболы, а в параболическом - индикатриса Дюпена представляет собой две параллельные прямые. Во всех трех случаях точка поверхности является центром кривой, и, кривая имеет две оси симметрии.

Для построения индикатрисы Дюпена в каждой точке изображения необходимо получить значения частных производных. Учитывая высокую фрактальность изображения, использование

разностных методов для вычисления частных производных является неустойчивым.

Для вычисления усредненного значения частных производных вокруг каждой точки образуем область, на которой методом наименьших квадратов строится полином 2-й степени наименее отклоняющийся от данных, определенных в области точки. Таким образом, каждой точке изображения ставится в соответствие полином второй степени двух переменных. Используя это аналитическое представление, можно получить приближенные значения частных производных в этой точке, а, следовательно, - значения и направления главных кривизн. Имея информацию о дифференциальных характеристиках изображения, можно проводить анализ изображения с точки зрения изменения структуры элементов этого изображения.

Алгоритм построения каркаса изображения.

Считая, что $f_{i,j}$ - значение изображения в точке (i,j) , найдем алгебраический полином второй степени двух переменных наименее отклоняющийся от $f_{i-v,j-\mu}$ для $\mu, \nu = -1, 0, 1$, то есть, в случае, когда окрестность представляет собой квадрат со стороной в три пиксела -

$$\Phi(a_{\nu\mu}) = \sum_{\nu, \mu=-1}^1 \left(f_{i-\nu, j-\mu} - (a_{00} + a_{10} \cdot \nu + a_{01} \cdot \mu + a_{20} \cdot \nu^2 + 2a_{11} \cdot \nu \cdot \mu + a_{02} \cdot \mu^2) \right)^2 \rightarrow \min$$

Полученная функция является параболоидом и имеет один экстремум - минимум, для определения этого экстремума продифференцируем функцию φ по каждой переменной и результат приравняем нулю. Решая полученную систему, получаем

$$a_{00} = \frac{2}{9}f_{i-1,j} - \frac{1}{9}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{9}f_{i+1,j-1} + \frac{2}{9}f_{i+1,j} - \frac{1}{9}f_{i+1,j+1} + \frac{5}{9}f_{i,j} - \frac{1}{9}f_{i-1,j-1} + \frac{2}{9}f_{i,j-1} + \frac{2}{9}f_{i,j+1},$$

$$a_{10} = -\frac{1}{6}f_{i-1,j} - \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i-1,j-1},$$

$$a_{01} = \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i,j-1} + \frac{1}{6}f_{i,j+1} - \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i-1,j-1},$$

$$a_{20} = \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{3}f_{i,j-1} - \frac{1}{3}f_{i,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i-1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j} + \frac{1}{3}f_{i,j} + \frac{1}{6}f_{i-1,j-1},$$

$$a_{11} = -\frac{1}{4}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{4}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{4}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{4}f_{i-1,j-1},$$

$$a_{02} = -\frac{1}{3}f_{i-1,j} + \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i,j-1} - \frac{1}{3}f_{i,j} + \frac{1}{6}f_{i,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} - \frac{1}{3}f_{i+1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i-1,j-1}.$$

Отсюда получаем полином, описывающий поведение изображения в точке (i, j)

$$\begin{aligned}
 P_2(x, y) = & \frac{2}{9}f_{i-1,j} - \frac{1}{9}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{9}f_{i+1,j-1} + \frac{2}{9}f_{i+1,j} - \frac{1}{9}f_{i+1,j+1} + \frac{5}{9}f_{i,j} - \frac{1}{9}f_{i-1,j-1} + \frac{2}{9}f_{i,j-1} \\
 & + \frac{2}{9}f_{i,j+1} + \left(-\frac{1}{6}f_{i-1,j} - \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i-1,j-1} \right) \cdot (x-i) + \\
 & \left(\frac{1}{6}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i,j-1} + \frac{1}{6}f_{i,j+1} - \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} - \frac{1}{6}f_{i-1,j-1} \right) \cdot (y-j) + \\
 & \left(\frac{1}{6}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{3}f_{i,j-1} - \frac{1}{3}f_{i,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i-1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j} + \frac{1}{3}f_{i,j} + \frac{1}{6}f_{i-1,j-1} \right) \cdot \\
 & (x-i)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}f_{i-1,j+1} - \frac{1}{8}f_{i+1,j-1} + \frac{1}{8}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{8}f_{i-1,j-1} \right) \cdot (x-i) \cdot (y-j) + \\
 & \left(-\frac{1}{3}f_{i-1,j} + \frac{1}{6}f_{i-1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i,j-1} - \frac{1}{3}f_{i,j} + \frac{1}{6}f_{i,j+1} + \frac{1}{6}f_{i+1,j-1} - \frac{1}{3}f_{i+1,j} + \frac{1}{6}f_{i+1,j+1} + \frac{1}{6}f_{i-1,j-1} \right) \cdot \\
 & (y-j)^2.
 \end{aligned}$$

Так как от параллельного сдвига результат не изменится, то без потери общности можно считать $i=0$ и $j=0$.

Вычислим частные производные:

$$f'_x(x, y) = a_{10} + 2 \cdot a_{20} \cdot x + 2 \cdot a_{11} \cdot y, f''_{xx} = 2 \cdot a_{20},$$

$$f'_y = a_{10} + 2 \cdot a_{02} \cdot y + 2 \cdot a_{11} \cdot x, f''_{xy} = 2 \cdot a_{11}, f''_{yy} = 2 \cdot a_{02}.$$

Значения частных производных в точке $(0,0)$ будут равны:

$$f'_x(0,0) = a_{10}, f''_{xx}(0,0) = 2 \cdot a_{20}, f'_y(0,0) = a_{01},$$

$$f''_{xy}(0,0) = a_{11}, f''_{yy}(0,0) = 2 \cdot a_{02}.$$

Вычислим значения производных в направлении вектора $(\cos \varphi, \sin \varphi)$:

$$\frac{df}{dS}(0,0) = \frac{df}{dx}(0,0) \cos \varphi + \frac{df}{dy}(0,0) \sin \varphi,$$

$$\frac{d^2f}{dS^2}(0,0) = \frac{d^2f}{dx^2}(0,0) \cos^2 \varphi + 2 \cdot \frac{d^2f}{dxdy}(0,0) \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \frac{d^2f}{dy^2}(0,0) \sin^2 \varphi.$$

Тогда значение кривизны будет иметь вид:

$$K|_{0,0}(\Phi) = \frac{|f''_{xx}(0,0) \cos^2 \varphi + f''_{xy}(0,0) \sin 2\varphi + f''_{yy}(0,0) \sin^2 \varphi|}{\left(\sqrt{1 + (f'_x(0,0) \cos \varphi + f'_y(0,0) \sin \varphi)^2} \right)^3}. \quad (1)$$

Для малой окрестности точки можно считать, что функция имеет естественную параметризацию, то есть имеет место равенство

$$\left(\sqrt{1 + \left(f'_x(0,0) \cos \varphi + f'_y(0,0) \sin \varphi \right)^2} \right)^3 \approx 1,$$

таким образом, получаем:

$$K|_{0,0}(\Phi) \approx f''_{xx}(0,0) \cos^2 \varphi + f''_{xy}(0,0) \sin 2\varphi + f''_{yy}(0,0) \sin^2 \varphi.$$

Для нахождения направления и величины главных кривизн нужно найти экстремумы этой функции. Возьмем от этого выражения производную по φ и приравняем к нулю для получения главных направлений кривизны:

$$\frac{dK|_{0,0}(\Phi)}{d\varphi} = -2 \cdot f''_{xx}(0,0) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + f''_{xy}(0,0) \cdot \cos 2\varphi + 2 \cdot f''_{yy}(0,0) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,$$

или, что то же

$$2 \cdot \left(f''_{yy}(0,0) - f''_{xx}(0,0) \right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + f''_{xy}(0,0) \cdot \cos 2\varphi = 0.$$

Таким образом получаем простое тригонометрическое уравнение:

$$\left(f''_{yy}(0,0) - f''_{xx}(0,0) \right) \cdot \sin 2\varphi + f''_{xy}(0,0) \cdot \cos 2\varphi = 0.$$

Решая это уравнение, получаем $\varphi = \frac{k\pi - \theta}{2}$ при $k \in Z$, где

$$\theta = \arcsin \frac{f''_{xy}(0,0)}{\sqrt{\left(f''_{yy}(0,0) - f''_{xx}(0,0) \right)^2 + \left(f''_{xy}(0,0) \right)^2}} = \arcsin \frac{2 \cdot a_{11}}{\sqrt{\left(2 \cdot a_{02} - 2 \cdot a_{20} \right)^2 + 4 \cdot a_{11}^2}}.$$

Таким образом мы получили два основных направления кривизны –

$$\varphi_0 = -\frac{\theta}{2} \text{ и } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, каждой точке изображения в градациях серого (или для каждой цветовой компоненты отдельно) ставится в соответствие два направления основных кривизн, определяемых углами (2) вместе с соответствующими значениями кривизн (1).

Выводы.

Предложенный алгоритм реализован на алгоритмическом языке C# и показал свою пригодность в задачах анализа изображений. Эта технология может быть использована для разделения изображения на области (кластеры) с похожей дифференциальной структурой, в

частности, для выделения «нитевидных» объектов и объектов искусственного происхождения на изображениях аэрокосмической съемки.

Результат реализации предложенного алгоритма.



Рисунок 1 - Оригинальное изображение

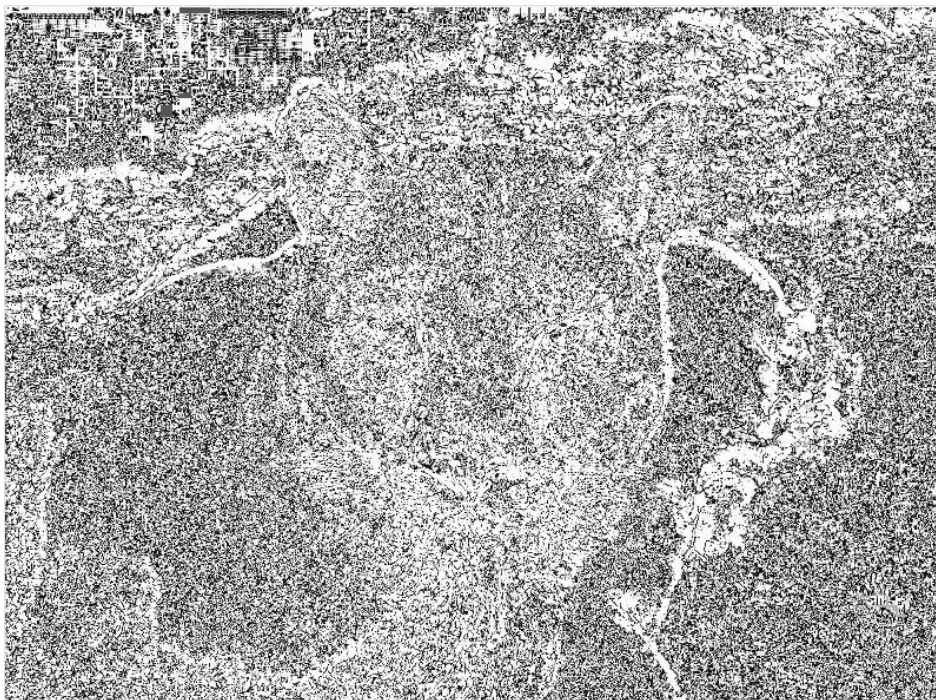


Рисунок 2 - Каркас изображения

ЛИТЕРАТУРА

1. Когут П.І., Сердюк М.Є. Про задачу реконструкції зображень за їх каркасною інтерполяцією // Системні технології, 3 (50), 2007.- С. 35-45.
2. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов / Я.А.Фурман, А.В.Кревецкий, А.К.Передреев, А.А.Роженцов, Р.Г.Хавизов, И.Л.Егошина, А.Н.Леухин. Под ред. Я.А.Фурмана.- 2-е изд., испр.. – М.:Физматлит, 2003.-592 с.
3. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений.- М.: Техносфера, 2005.- 1070 с.

Получено 08.02.2009г.