

УДК 535.41

В.Ф. Рожковский, Н.А. Куинн

## МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ФАЗ ПРИ РАСШИФРОВКЕ ИНТЕРФЕРОГРАММ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### Введение

Интерферограмма образуется при когерентном сложении голограмм объекта при двух его положениях в пространстве. Она представляет собой фотографию объекта, промодулированную интерференционными полосами. Освещенность точки на фотографии зависит от соотношения между фазами двух пришедших световых волн и определяется по формуле

$$I(x, y) = I_0(x, y)(1 + \cos(2\pi\varphi(x, y))),$$

где  $x, y$  – координаты точки на интерферограмме;  $I(x, y)$  – результирующая освещенность;  $I_0(x, y)$  – исходная освещенность точки поверхности объекта, определяющая его фотографическое изображение;  $\varphi(x, y)$  – изменение фазы (далее – просто фаза), вызванное перемещением точки. Целью расшифровки интерферограмм является определение изменения фазы  $\varphi(x, y)$ , по которому можно затем вычислить перемещения и зависящие от них величины – деформации и напряжения. Одна из трудностей создания алгоритма расшифровки связана с тем, что функция, обратная к косинусу, является многозначной.

### Постановка задачи

На основе метода конечных элементов может быть построен достаточно эффективный трехэтапный алгоритм расшифровки интерферограмм /1, 2/. Решается задача минимизации функционала

$$J(\varphi) = \iint_{\Omega} (I(x, y) - I_0(x, y)(1 + \cos 2\pi\varphi(x, y)))^2 d\Omega, \quad (1)$$

где  $\Omega$  – область интерферограммы.

Интерферограмма покрывается сетью из конечных элементов. На первом этапе, называемом этапом первичного распознавания, решается задача минимизации функционала (1) на каждом элементе

независимо от других. После первого этапа в узлах каждого элемента определяются значения фаз с точностью до знака и целой аддитивной добавки. На втором этапе, называемом этапом согласования, для каждого элемента вычисляются оптимальные значения знака и аддитивной добавки. На третьем этапе полученные узловое значения фаз уточняются, причем каждый узел рассматривается в составе ансамбля элементов. В статье рассматривается третий этап алгоритма.

Задача третьего этапа – произвести оценку значений фаз в узлах конечно-элементного разбиения таким образом, чтобы они давали распределение освещенности, наиболее близкое к реальному, при условии непрерывности между элементами.

### Метод решения

Рассмотрим конечный элемент в виде четырехугольника с полиномиальным законом изменения фаз внутри него:

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^K b_j x^{c_j} y^{e_j}, \quad (2)$$

где  $b_j$  – постоянные коэффициенты;

$c_j, e_j$  – определенные показатели степени.

Вид полинома выбирают в зависимости от необходимой степени гладкости фаз. В простейшем случае, когда требуется непрерывность только самой функции фаз, выбирают полином в виде билинейной функции:

$$\varphi(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy,$$

Четырех значений фаз в узлах четырехугольника достаточно для определения четырех коэффициентов  $b_j$ . Для случая, когда требуется непрерывность не только функции фаз, но и ее первых производных, полином можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 x^2 y + b_7 xy^2 + b_8 x^2 y^2 + \\ & + b_9 x^3 + b_{10} y^3 + b_{11} x^3 y + b_{12} xy^3 + b_{13} x^3 y^2 + b_{14} x^2 y^3 + b_{15} x^3 y^3. \end{aligned}$$

Для определения шестнадцати неизвестных коэффициентов в каждом узле четырехугольника необходимо использовать четыре параметра: саму функцию, ее первые производные по координатам и вторую смешанную производную. Для исследования поведения оболочечных конструкций желательно обеспечить непрерывность

производных от функции фаз до второй включительно. Для этих целей может быть использован следующий полином:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 + b_8x^2y^2 + \\ & + b_9x^3 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3 + b_{13}x^3y^2 + b_{14}x^2y^3 + b_{15}x^3y^3 + b_{16}x^4 \\ & + b_{17}y^4 + b_{18}x^4y^1 + b_{19}x^1y^4 + b_{20}x^5 + b_{21}y^5 + b_{22}x^5y + b_{23}xy^5. \end{aligned}$$

Для такого полинома в каждом узле четырехугольника используются, кроме ранее перечисленного, две вторые производные по осям.

Если в узле  $i$  четырехугольника заданы  $N$  параметров  $\psi_{(i-1)N+k}$ ,  $k=1, 2, \dots, N$  типа значений фаз и их производных, то значения коэффициентов  $b_j$  могут быть определены путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^K a_{sj} b_s = \psi_{\omega(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, K,$$

где  $a_{sj}$  – коэффициенты, зависящие от координат узлов;  $\omega(j)$  – функция, связывающая локальные номера параметров (номера параметров в элементе) с глобальными номерами параметров (номера параметров для ансамбля элементов);  $K$  – общее количество параметров в элементе.

Решение такой системы уравнений можно представить в виде

$$b_j = \sum_{i=1}^K d_{ij} \psi_{\omega(i)}, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

где  $d_{ij}$  – элементы матрицы, обратной к матрице с элементами  $a_{ij}$ .

Подстановка (2) и (3) в (1) дает

$$J = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \left( I(x, y) - I_0(x, y) \left( 1 + \cos \left( 2\pi \sum_{k=1}^K \psi_{\omega(k)} \sum_{j=1}^K d_{kj} x^{c_j} y^{e_j} \right) \right) \right)^2 d\Omega_i. \quad (4)$$

Функцию (4) следует минимизировать относительно величин  $\psi_i$ . В ходе машинных экспериментов для минимизации функции (4) опробованы методы покоординатного спуска и метод Ньютона-Рафсона, которые показали удовлетворительные результаты. Но наиболее быстрый и надежный результат дает метод минимизации, описанный ниже.

Введем функцию  $\Phi(x, y)$ , которая вычисляется по функции освещенности  $I(x, y)$  с помощью формулы

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{2I(x, y) - \max(I) - \min(I)}{\max(I) - \min(I)} \right), \quad (5)$$

где  $\min$ ,  $\max$  – соответственно минимум и максимум внутри элемента. В отличие от функции  $I(x, y)$ , которая в сечении похожа на синусоиду, функция  $\Phi(x, y)$  в сечении похожа на ломаную прямую. Идея состоит в том, чтобы «выпрямить» функцию  $\Phi(x, y)$  путем ее разгибания относительно определенных линий. Предположим, коэффициенты полиномов (2) известны. Тогда формулы для разгибания функции  $\Phi(x, y)$  выглядят следующим образом. Сначала вычисляется величина

$$j(x, y) = \left[ \sum_{j=1}^K b_j x^{c_j} y^{e_j} \right], \quad (6)$$

где  $[ ]$  – операция приведения к целому в сторону минус бесконечности. Затем функция  $\Phi(x, y)$  преобразуется таким образом

$$\Phi_1(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y) + j(x, y), & \text{если } j(x, y) \text{ - четное;} \\ 1 - \Phi(x, y) + j(x, y), & \text{если } j(x, y) \text{ - нечетное.} \end{cases} \quad (7)$$

Теперь коэффициенты полинома можно уточнить путем минимизации функции

$$J = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \left( \Phi_1(x, y) - \sum_{j=1}^K b_j x^{c_j} y^{e_j} \right)^2 d\Omega_i.$$

Выражая величины  $b_j$  через узловые фазы в соответствии с (3), получим

$$J = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \left( \Phi_1(x, y) - \sum_{k=1}^K \psi_{\omega(k)} \sum_{j=1}^K d_{kj} x^{c_j} y^{e_j} \right)^2 d\Omega_i. \quad (8)$$

Обозначим

$$g_k(x, y) = \sum_{j=1}^K d_{kj} x^{c_j} y^{e_j}.$$

Величины  $g_k(x, y)$  обычно называются функциями формы элементов. В этих обозначениях формула (8) примет вид

$$J = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \left( \Phi_1(x, y) - \sum_{k=1}^K \psi_{\omega(k)} g_k(x, y) \right)^2 d\Omega_i. \quad (9)$$

Чтобы решить задачу уточнения узловых значений, необходимо найти минимум функции (9). Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial \psi_n} = 0, \quad n = 1, \dots, S,$$

где  $S$  – общее количество параметров, относительно величин  $\psi_n$ . Эту систему уравнений можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^S A_{m,n} \psi_n = B_n, \quad n = 1, \dots, S. \quad (10)$$

В формуле (8) использованы следующие обозначения

$$A_{m,n} = \sum_{i \in \sigma(m,n)} \iint_{\Omega_i} g_{v(m)}(x,y) g_{v(n)}(x,y) d\Omega_i,$$

$$B_n = \sum_{i \in \sigma(n)} \iint_{\Omega_i} \Phi_1(x,y) g_{v(n)}(x,y) d\Omega_i,$$

где  $\sigma(m,n)$  – множество конечных элементов, для описания изменения фаз в которых используются одновременно параметры с номерами  $m$  и  $n$ ;  $\sigma(n)$  – множество конечных элементов, для описания изменения фаз в которых используется параметр с номером  $n$ ;  $v(m)$  – функция, связывающая глобальные номера параметров с локальными номерами параметров.

В системе уравнений (10) величины  $B_n$  выражаются через величину  $\Phi_1(x,y)$ , которая, в свою очередь, согласно формулам (6) и (7), зависят от значений фаз в узлах. Поэтому процесс нахождения решения уравнения (10) является итерационным. Это означает, что после нахождения очередного решения системы уравнений (10) для некоторого значения функции  $\Phi_1(x,y)$  необходимо уточнить значение функции  $\Phi_1(x,y)$  и повторить процесс решения.

В качестве начального значения фазы в узле конечноэлементного разбиения принимается среднее арифметическое всех фаз узлов примыкающих элементов, может быть, за исключением тех примыкающих элементов, фазы в которых резко отличаются от других.

Для решения системы уравнений (10) использовались методы Гаусса и Гаусса-Зейделя. Метод Гаусса-Зейделя по своей сути

является итерационным методом, его легче приспособить для решения поставленной задачи. Однако лучшие результаты показал метод Гаусса. Поскольку матрица системы уравнений (10) в процессе итераций остается неизменной, применялась следующая схема метода Гаусса. Прямой ход для матрицы системы уравнений осуществлялся заранее, вне итераций по уточнению правой части. В процессе итераций производился прямой ход для правой части системы уравнений и обратный ход.

Во всех рассмотренных случаях наблюдалась сходимость итераций по уточнению правой части.

Если результатом расшифровки интерферограмм являются фазы в отдельных точках объекта, то рассмотренных алгоритмов вполне достаточно для их определения. Если результатом расшифровки должны стать производные от фаз или величины, от них зависящие, то необходимо обеспечивать необходимую гладкость решения по распределению фаз на поверхности объекта. Это связано с тем, что дифференцирование является такой операцией, которая усугубляет погрешности задания функции.

Обычным способом обеспечения необходимой гладкости решений является регуляризация соответствующей функции. Эта операция заключается в том, что к минимизируемой функции добавляют члены, зависящие от степени гладкости искомой функции таким образом, что при увеличении степени гладкости эти члены стремятся к нулю. Такими членами могут стать квадраты вторых производных от функции фаз. В этом случае минимизируемую функцию можно представить в виде

$$J_1 = J + \alpha \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} \left( \sum_{k=1}^K \psi_{\omega(k)} \frac{\partial^2 g_k(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^K \psi_{\omega(k)} \frac{\partial^2 g_k(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega_i,$$

где  $J$  – функция, вычисляемая по формуле (9);  $\alpha$  – параметр регуляризации, определяющий степень сглаживания. В системе уравнений (10) при этом изменится выражение для членов матрицы, которое можно представить в виде

$$A_{m,n} = \sum_{i \in \sigma(m,n)} \iint_{\Omega_i} g_{v(m)}(x,y) g_{v(n)}(x,y) + \alpha \left( \frac{\partial^2 g_{v(m)}(x,y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g_{v(n)}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{v(m)}(x,y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g_{v(n)}(x,y)}{\partial y^2} \right) d\Omega_i$$

Методы решения системы уравнений остаются прежними.

Параметр регуляризации  $\alpha$  может подбираться вручную. В этом случае необходимо наблюдать за изменением интерферограммы, построенной по вычисленным значениям фаз, при увеличении параметра  $\alpha$ , сравнивая ее с исходной. Оптимальным значением  $\alpha$  будет максимальное значение, которое не приводит к существенному искажению интерферограммы.

Альтернативным способом определения параметра  $\alpha$  может быть подбор этого параметра, исходя из точности определения фаз. При увеличении параметра  $\alpha$  увеличивается и среднее квадратичное отклонение вычисленных значений фаз от заданных. Поэтому, задавая заранее величину среднего квадратичного отклонения, которое может считаться средней точностью задания фаз, можно вычислить соответствующее ему значение параметра регуляризации  $\alpha$ .

На рис. показаны виды расшифрованной интерферограммы с различным уровнем регуляризации.

### Выводы

Задача оценки значений фаз как без регуляризации, так и с регуляризацией сводится к минимизации нелинейного функционала. Для минимизации полученных функционалов применялись стандартные методики и специально разработанная для этой цели методика, согласно которой минимизация функционала сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений. Последняя методика требует наименьших затрат машинного времени для получения результатов.

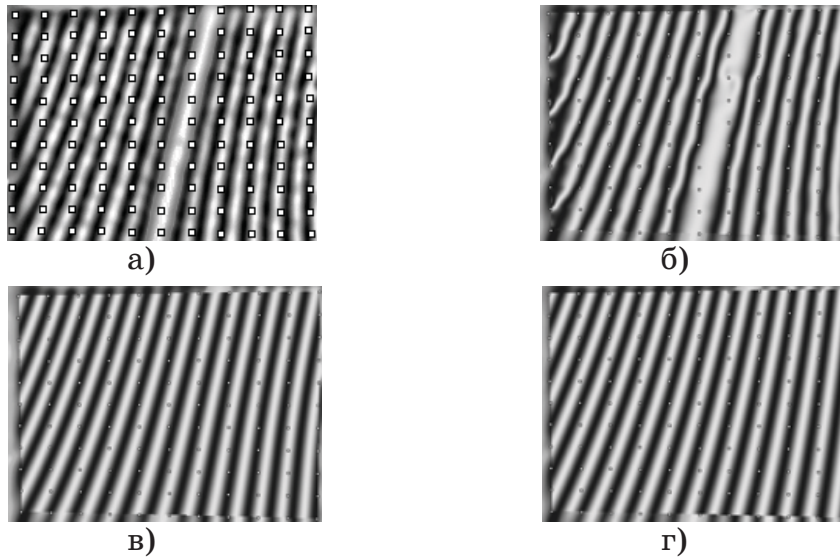


Рисунок 1 – Уточнение значений фаз с регуляризацией: а) исходная интерферограмма с узлами конечноэлементного разбиения, 16 степеней свободы в элементе; б) уточненная интерферограмма без регуляризации; в) уточненная интерферограмма с оптимальной регуляризацией; г) уточненная интерферограмма с чрезмерной регуляризацией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рожковский В. Ф., Бузская Н. А. Способы предварительного распознавания при расшифровке интерферограмм методом конечных элементов // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 4 (39). – Днепропетровск., 2005. - С. 3-12.
2. Рожковский В. Ф., Бузская Н. А. Согласование элементов при расшифровке интерферограмм методом конечных элементов // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 1 (48). – Днепропетровск, 2007. - С. 130-137.

Получено 12.02.2009г.