УДК 519-873

А.И. Песчанский

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ВОЗРАСТА И ОТКЛЮЧЕНИЕМ ЕЁ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. Одной из стратегий технического обслуживания (ТО) элемента является стратегия, известная в литературе под названием «восстановление в зависимости от возраста» [1,2]. Данная стратегия предполагает, что элемент полностью восстанавливается после отказа. Если же элемент проработал без отказа заданный интервал времени τ, то проводится его ТО, после которого он также полностью обновляется. В [3] построена полумарковская модель указанной стратегии ТО многокомпонентной системы с монотонной структурой в предположении, что в результате отказа какого-либо элемента системы не происходит отключения работоспособных элементов (функционально связанных с отказавшим), которые не принадлежат ни одному работоспособному пути

Целью данной работы является построение полумарковской модели ТО по возрасту элементов сложной системы с учётом их отключения. Необходимо также найти стационарные надёжностные и экономические показатели функционирования системы и решить задачу определения оптимальных сроков проведения ТО элементов.

Постановка задачи и построение математической модели. Рассмотрим N-компонентную систему с монотонной структурой. Опишем стратегию ТО её элементов.

В начальный момент времени $t=0$ начинается эксплуатация системы и назначается допустимый уровень наработки (возраст) τ_i каждого i-го элемента системы, при достижении которого проводится его плановое ТО. Время безотказной работы i-го элемента системы – случайная величина (СВ) α_i с ФР $F_i(t)$. Если к назначенному моменту τ_i i-й элемент системы не отказал, тогда начинается плановое ТО элемента, которое его полностью обновляет. Длительность этого ТО – СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t)$.

Если до назначенного момента τ_i i-й элемент системы отказывает, то отказ обнаруживается мгновенно и начинается его аварийное восстановление (АВ). Длительной этой восстановительной работы – СВ β_i с ФР $G_i(t)$. В результате АВ элемент также полностью обновляется и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Предположим, что в результате аварийного отказа или в связи с началом ТО какого-либо элемента происходит отключение тех работоспособных элементов системы, которые не принадлежат более ни одному работоспособному пути. Также отключаются элементы, находящиеся в состоянии АВ или ТО и восстановление которых не приведет к образованию работоспособного пути.

Отключенные элементы включаются в систему с тем же уровнем работоспособности, на котором их застало отключение. Включение происходит в момент окончания АВ или завершения ТО какого-либо элемента, при условии образования совместно с восстановившимся элементом работоспособного пути.

Перейдем к построению полумарковской модели системы. Начнем с фазового пространства состояний. Каждый элемент системы может находиться в трех физических состояниях:

1 – в работоспособном состоянии или быть отключённым в работоспособном состоянии;

0 – восстанавливаться или быть отключённым в восстанавливаемом состоянии;

2 – в состоянии ТО или быть отключённым в состоянии ТО.

Физические состояния системы опишем множеством векторов $D=\left\{\overline{d}=(d_1,...,d_N),\, d_k=0,1,2;\, k=\overline{1,N}\right\}$. Компонента d_k вектора $\overline{d}$ указывает на физическое состояние k-го элемента системы.

Для того чтобы физические состояния обладали полумарковским свойством, эти состояния расширим. Для этого будем указывать номер элемента, изменившего своё состояние последним. Добавим непрерывные компоненты, указывающие на оставшиеся времена до ближайших изменений состояний элементов. В кодировке расширенного состояния эти времена будут описываться вектором $\overline{x}^{(i)}=(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_N)$.

Также в соответствии с выбранной стратегией ТО элементов в кодировку состояний системы введем вектор $\overline{u}=(u_1,...,u_N)$,

 ISSN 1562-9945

компоненты которого указывают на наработку элементов с момента последнего возобновления их работоспособности.

Таким образом, фазовое пространство ПМ состояний системы с учетом проведения ТО её элементов определяется кодами $E^* = \left\{ i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ i = \overline{1,N} \right\}$. Расшифруем содержательный смысл кода состояний:

i – номер элемента, изменившего свое «физическое» состояние последним;

$d_k = 0,1,2$ – код физического состояния k-го элемента системы;

x_k – время с момента последнего изменения состояния i-го элемента до ближайшего момента изменения состояния k-го элемента $(x_i = 0)$ без учета времени отключения; причем, если $d_k = 1$, то x_k – время до ближайшего аварийного отказа k-го элемента;

u_k – наработка k-го элемента с момента окончания его последнего АВ или ТО. Если $d_k = 2$, то считается, что $u_k = \tau_k$. В момент восстановления работоспособности i-го элемента после его ТО или АВ, наработка этого элемента равна нулю: $u_i = 0$.

Обозначим через I_d множество номеров элементов, отключаемых в состоянии $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ i = \overline{1,N}$. Времена пребывания системы в состояниях задаются формулами

$$\theta_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}} = \gamma_i^{(d_i)} \wedge \mathop{\Lambda}_{\substack{k \neq i \\ k \notin I_d}} x_k \mathop{\Lambda}_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \notin I_d}} \left(\tau_k - u_k\right),$$

где Λ – знак минимума; Ω_d^1 – совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных 1, $\gamma_i^{(d_i)} = \begin{cases} \alpha_i,\ d_i = 1, \\ \beta_i,\ d_i = 0, \\ \beta_i^p,\ d_i = 2. \end{cases}$

Опишем вероятности (плотности вероятностей) переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\left\{\xi_n,\ n \geq 0\right\}$. Заметим, что i-й элемент из физического состояния 1 может перейти в состояние 0 (АВ) и в состояние 2 (ТО), а из состояний 0 и 2 – только в состояние 1. Обозначим

$$z_{i,I_d} = \mathop{\Lambda}_{\substack{k \neq i \\ k \notin I_d}} x_k \wedge \mathop{\Lambda}_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \notin I_d}} \left(\tau_k - u_k\right), \qquad (1)$$

а через Ω_d^0, Ω_d^2 – совокупности номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных соответственно 0 и 2.

Из состояния $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}$, $i=\overline{1,N}$, переходы бывают следующих типов:

а) в совокупность состояний $i\overline{d'}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u'}$, $d_i'\neq 2$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}}=\psi_i^{(d_i)}(z_{i,I_d}-y)$, где $y<z_{i,I_d}$, $\psi_i^{(d_i)}(\cdot)$ – плотность распределения вероятностей СВ $\gamma_i^{(d_i)}$,

$$d_k'=d_k,\, k\neq i;\; x_k'=x_k-(z_{i,I_d}-y),\, k\neq i,\, k\notin I_d;\; x_k'=x_k,\; k\in I_d;$$

$$u_k'=\begin{cases}u_k+z_{i,I_d}-y, & k\in\Omega_d^1,\, k\notin I_d,\\ u_k, & k\in\Omega_d^0,\, k\in I_d,\\ \tau_k, & k\in\Omega_d^2,\end{cases}\qquad k\neq i,\qquad u_i'=\begin{cases}u_i+z_{i,I_d}-y, & i\in\Omega_d^1,\\ 0, & i\in\Omega_d^0\cup\Omega_d^2;\end{cases}$$

б) в совокупность состояний $i\overline{d'}\,\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}$, $d_i=1$, $d_i'=2$, с вероятностью перехода $P_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}}=\overline{F}_i(\tau_i)$, где $d_k'=d_k,\, k\neq i;\; x_k'=x_k-\tau_i,\, k\neq i,\, k\notin I_d;\; x_k'=x_k,\, k\in I_d;$

$$u_k'=\begin{cases}u_k+\tau_i, & k\in\Omega_d^1,\, k\notin I_d,\\ u_k, & k\in\Omega_d^0,\, k\in I_d,\\ \tau_k, & k\in\Omega_d^2;\end{cases}$$

в) в совокупность состояний $j\overline{d'}\,\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}$, $j\neq i,\, j\notin I_d$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{j\overline{d'}\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}}=\psi_i^{(d_i)}(z_{i,I_d}+y)$,

где $y>0,\, d_k'=d_k,\, k\neq j,\, x_i'=y,\; x_k'=x_k-z_{i,I_d},\; k\neq i,j,$

$$u_j'=\begin{cases}u_j+z_{i,I_d}, & j\in\Omega_d^1,\; d_j'=0,\\ \tau_j, & j\in\Omega_d^1,\; d_j'=2,\\ 0, & j\in\Omega_d^0\cup\Omega_d^2,\end{cases}\qquad u_k'=\begin{cases}u_k+z_{i,I_d}, & k\in\Omega_d^1,\, k\notin I_d,\\ u_k, & k\in\Omega_d^0,\, k\in I_d,\\ \tau_k, & k\in\Omega_d^2,\end{cases}\qquad k\neq j.$$

Предположим, что для ВЦМ $\{\xi_n, n\geq 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения $\rho(\cdot)$ [4,5].

 ISSN 1562-9945

Имеет место

Теорема. Стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ определяется формулами

$$\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=\begin{cases}\rho\prod\limits_{k\in\Omega_d^0} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^1} f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k),\ i\notin\Omega_d^1,\ x_i=0,\\ \rho\prod\limits_{k\in\Omega_d^0} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\neq i}} f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k), \qquad i\in\Omega_d^1,\end{cases}$$

(2)

$$\rho=\left[\sum_{d\in D^*}\left[\sum_{\substack{i\in\Omega_d^1\\ i\notin I_d}}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)+\sum_{\substack{i\in\Omega_d^0\\ i\notin I_d}}F_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)+\sum_{\substack{i\in\Omega_d^2\\ i\notin I_d}}\overline{F}_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)\right]\right]^{-1}.$$

$$T_k^{(d_k)}=\begin{cases}\int\limits_0^{\tau_k}\overline{F}_k(t)dt,\ d_k=1,\\ F_k(\tau_k)M\beta_k,\ d_k=0,\\ \overline{F}_k(\tau_k)M\beta_k^p,\ d_k=2.\end{cases}$$

Доказательство. Стационарное распределение вероятностей $\rho(B)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений [4]

$$\rho(B)=\int\limits_{E^*}\rho(dz)P(z,B),\quad \rho(B)=1.$$

Уравнение из этой системы, например, для состояния $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ d_i=0,\ i=\overline{1,N};\ i\notin I_d;$ имеет вид:

$$\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=f_m(x_m+u_{m,I})\rho\left(m\overline{d'}\overline{x''}^{(m)}\overline{u''}\right)+$$

$$\sum_{\substack{j\in\Omega_{d'}^0\cup\Omega_{d'}^2\\ j\notin I_{d'}}}\int\limits_0^{u_{m,I}}\psi_j^{\left(d_j'\right)}\left(t+x_j\right)\rho\left(j\overline{d'}(\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}\right)dt, \tag{3}$$

$$x_i=0,\ d_i=0,\ i=\overline{1,N};\ i\notin I_d;\quad d_i'=1, d_k'=d_k, k\neq i,\ u_{m,I}=\bigwedge_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\notin I_{d'}}}u_k,$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что формулы (2) определяют решение этого уравнения. Для интересующего нас состояния $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}$ имеем

$d_i = 0,\ d_i' = 1,\ \Omega_{d'}^1 - \{i\} = \Omega_d^1,\ \Omega_{d'}^0 \cup \{i\} = \Omega_d^0,\ \Omega_{d'}^2 = \Omega_d^2$. Подставляя (2) в правую часть уравнения (3), получаем

$$f_m(u_{m,I} + x_m)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k + u_{m,I})\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\neq m}} f_k(u_k + x_k)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k + u_{m,I}) +$$

$$+\left[\sum_{\substack{j\in\Omega_{d'}^0\\ j\notin I_{d'}}}\int_0^{u_{m,I}} g_j\left(x_j + t\right)f_j(u_j)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\notin I_{d'},k\neq j}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k + t)\prod_{k\in\Omega_{d'}^1} f_k(u_k + x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\notin I_{d'}}}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k + t)dt +\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{j\in\Omega_{d'}^2\\ j\notin I_{d'}}}\int_0^{u_{m,I}} g_j^p\left(x_j + t\right)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\notin I_{d'}}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k + t)\prod_{k\in\Omega_{d'}^1} f_k(u_k + x_k)\overline{F}_j(\tau_j)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\notin I_{d'},k\neq j}}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k + t)dt\right]\times$$

$$\times\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\in I_{d'}}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\in I_{d'}}}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k) =$$

$$= \prod_{k\in\Omega_{d'}^0} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k + u_{m,I})\prod_{k\in\Omega_{d'}^1} f_k(u_k + x_k)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k + u_{m,I}) -$$

$$-\prod_{k\in\Omega_{d'}^1} f_k(u_k + x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\in I_{d'}}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\in I_{d'}}}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k)\times$$

$$\times\int_0^{u_{m,I}}\frac{d}{dt}\left[\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\notin I_{d'}}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k + t)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\notin I_{d'}}}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k + t)\right]dt =$$

$$= \prod_{k\in\Omega_{d'}^1} f_k(u_k + x_k)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k) =$$

$$= f_i(u_i)\prod_{k\in\Omega_d^1} f_k(u_k + x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\neq i}} f_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod_{k\in\Omega_d^2}\overline{F}_k(\tau_k)\overline{G}_k^p(x_k) = \frac{1}{\rho}\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right).$$

Аналогично проверяется, что формулы (2) определяют стационарные распределения для остальных состояний системы. Постоянная ρ находится из условия нормировки.

Нахождение стационарных характеристик системы. Определим следующие стационарные показатели качества функционирования системы: среднюю стационарную наработку на отказ T_+^* системы; среднее стационарное время восстановления T_-^*; стационарный коэффициент технического использования $K_u^*(\tau_1,...,\tau_N)$; средний

ISSN 1562-9945

удельный доход $S^*(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящийся на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C^*(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы.

Разобьем фазовое пространство E^* состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+^* и E_-^*; E_+^* – подмножество работоспособных состояний, E_-^* – подмножество отказовых состояний:

$$E_+^* = \left\{ i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ \overline{d} \in D_+^*,\ i = \overline{1,N} \right\},\ E_-^* = \left\{ i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ \overline{d} \in D_-^*,\ i = \overline{1,N} \right\}.$$

Здесь $D_+^*\left(D_-^*\right)$– множество векторов $\overline{d}$, компоненты которых равны кодам физических состояний элементов системы, находящейся в подмножестве работоспособных (отказовых) состояний $E_+^*\left(E_-^*\right)$.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+^*, среднее стационарное время восстановления T_-^* и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u^* системы найдем по формулам [4,5]

$$\mathrm{T}_+^* = \frac{\int\limits_{E_+^*} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{E_-^*} \rho(dz)P(z,E_+^*)},\quad \mathrm{T}_-^* = \frac{\int\limits_{E_-^*} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{E_-^*} \rho(dz)P(z,E_+^*)},\quad K_u^* = \frac{\mathrm{T}_+^*}{\mathrm{T}_+^* + \mathrm{T}_-^*}, \tag{4}$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$, $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях системы, $P(z,E_+^*)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из отказовых состояний в работоспособные.

Для вычисления стационарных показателей по формулам (4) вычислим основные характеристики, входящие в эти формулы.

Начнём с интеграла $\int\limits_{E_+^*} m(z)\rho(dz)$. Среднее время пребывания системы в состоянии $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}$ находится по формуле $M\left[\theta_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}\right] = \int\limits_0^{z_{i,I_d}} \overline{\Psi}_i^{(d_i)}(t)dt$, где z_{i,I_d} определяется (1). Имеем

$$\int_{E_+^*} m(z)\rho(dz) = \sum_{d\in D_+^*}\sum_{\substack{i=1\\ i\notin I_d}}^{N}\int_U d\overline{\hat{u}}\int_{R_+^{N,i}}\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)d\overline{x}^{(i)}\int_0^{z_{i,I_d}}\overline{\Psi}_i^{(d_i)}(t)dt =$$

$$= -\sum_{d\in D_+^*}\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\in I_d}}\int_0^{\tau_k}\overline{F_k}(s)ds\int_0^{\tau^{1,I_d}}\frac{d}{dt}\left[\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\notin I_d}}\int_t^{\tau_k}\overline{F_k}(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^0}F_k(\tau_k)\int_t^{\infty}\overline{G_k}(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^2}\overline{F_k}(\tau_k)\int_t^{\infty}\overline{G_k^p}(s)ds\right]dt =$$

$$= \sum_{d\in D_+^*}\prod_{k\in\Omega_d^1}\int_0^{\tau_k}\overline{F_k}(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^0}M\beta_kF_k(\tau_k)\prod_{k\in\Omega_d^2}M\beta_k^p\overline{F_k}(\tau_k) = \sum_{d\in D_+^*}\prod_{k=1}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k).$$

Здесь

$$\tau^{1,I_d} = \bigwedge_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\notin I_d}}\tau_k,\ \ R_+^{N,i} = \left\{\overline{x}^{(i)},\ x_k\ge 0,\ k=\overline{1,N}\right\},$$

$$U = \left\{\overline{\hat{u}} = (u_{i_1},\ldots u_{i_s}),\ 0\le u_{i_r}\le\tau_k,\ i_r = k,\ k\in\Omega_d^0,\Omega_d^1\right\}.$$

Величины $T_k^{(d_k)}$ имеют следующий смысл: $T_k^{(1)}$ – среднее время пребывания k-го элемента в работоспособном состоянии, а $T_k^{(0)}+T_k^{(2)}$ – среднее время пребывания этого элемента в отказовом состоянии на периоде регенерации этого элемента.

Аналогично получаем

$$\int_{E_-^*} m(z)\rho(dz) = \sum_{d\in D_-^*}\prod_{k\in\Omega_d^1}\int_0^{\tau_k}\overline{F_k}(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^0}M\beta_kF_k(\tau_k)\prod_{k\in\Omega_d^2}M\beta_k^p\overline{F_k}(\tau_k) = \sum_{d\in D_-^*}\prod_{k=1}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k).$$

Перейдём к вычислению интеграла в знаменателях дробей (4). Заметим, что переходы в E_+^* могут осуществляться только из подмножества $E_-^{*'}\subset E_-^*$ с вероятностью единица, где $E_-^{*'} = \left\{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ \overline{d}\in D_-^*,\ i\in\Omega_d^0\cup\Omega_d^2,\ i\notin I_d\right\}$. Имеем

$$\int_{E_-^*}\rho(dz)P(z,E_+^*) = \int_{E_-^{*'}}\rho(dz) = \sum_{d\in D_-^*}\left[\sum_{\substack{i\in\Omega_d^0\\ i\notin I_d}}F_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\ne i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k) + \sum_{\substack{i\in\Omega_d^2\\ i\notin I_d}}\overline{F}_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\ne i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)\right]$$

Таким образом, формулы (4) преобразуются к виду

$$T_+^* = \frac{\sum_{d\in D_+^*}\prod_{k=1}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)}{\sum_{d\in D_-^*}\left[\sum_{\substack{i\in\Omega_d^0\\ i\notin I_d}}F_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\ne i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k) + \sum_{\substack{i\in\Omega_d^2\\ i\notin I_d}}\overline{F}_i(\tau_i)\prod_{\substack{k=1\\ k\ne i}}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)\right]},$$

ISSN 1562-9945

$$T_-^* = \frac{\sum\limits_{d \in D_-^*} \prod\limits_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k)}{\sum\limits_{d \in D_-^*} \left[\sum\limits_{\substack{i \in \Omega_d^0 \\ i \notin I_d}} F_i(\tau_i) \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k) + \sum\limits_{\substack{i \in \Omega_d^2 \\ i \notin I_d}} \overline{F}_i(\tau_i) \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k) \right]},$$

$$K_u^*(\tau_1, ..., \tau_N) = \frac{\sum\limits_{d \in D_+^*} \prod\limits_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k)}{\sum\limits_{d \in D^*} \prod\limits_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k)}. \qquad (5)$$

Выразим стационарные характеристики $T_+^*, T_-^*, K_u^*(\tau_1, ..., \tau_N)$ системы через коэффициенты технического использования $K_i(\tau_i)$ элементов, которые определяются формулами [1]:

$$K_i(\tau_i) = \frac{T_i^{(1)}}{T_i^{(1)} + T_i^{(0)} + T_i^{(2)}}, \ i = \overline{1, N}.$$

Обозначим через $M_i, i = \overline{1, \omega}$, все различные множества элементов путей системы, а Φ_i, $i = \overline{1, s}$, – множества элементов сечений системы [1]; $A(\Phi_i)\big(A(M_i)\big)$ – множество отключаемых элементов сечения Φ_i (пути M_i). Обратим внимание, что по определению, элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в нерабочем состоянии, т.е. в состояниях 0 или 2. Элементы, не принадлежащие множеству элементов сечения, находятся в работоспособном состоянии 1.

Формулы (5) с помощью преобразования сумм произведений средних после несложных преобразований приводится к виду:

$$T_+^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\omega} \prod\limits_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin M_i}}^{N} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)}{\sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{\substack{j \in \Phi_i \\ j \notin A(\Phi_i)}} \frac{1}{T_j^{(0)} + T_j^{(2)}} \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod\limits_{n \in \Phi_i} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)},$$

$$T_-^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod\limits_{n \in \Phi_i} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)}{\sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{\substack{j \in \Phi_i \\ j \notin A(\Phi_i)}} \frac{1}{T_j^{(0)} + T_j^{(2)}} \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod\limits_{n \in \Phi_i} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)},$$

$$K_u(\tau_1,...,\tau_N)=\frac{\sum_{i=1}^{\omega}\prod_{n\in M_i}K_n(\tau_n)\prod_{\substack{n=1\\ n\notin M_i}}^{N}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}{\sum_{i=1}^{\omega}\prod_{n\in M_i}K_n(\tau_n)\prod_{\substack{n=1\\ n\notin M_i}}^{N}\left(1-K_n(\tau_n)\right)+\sum_{i=1}^{s}\prod_{\substack{n=1\\ n\notin \Phi_i}}^{N}K_n(\tau_n)\prod_{n\in\Phi_i}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}.$$

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящегося на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C^*(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящихся на единицу времени исправного функционирования системы, используем формулы [6]

$$S^*=\frac{\int_{\mathrm{E}^*} m(z)f_s(z)\rho(dz)}{\int_{\mathrm{E}^*} m(z)\rho(dz)},\qquad C^*=\frac{\int_{\mathrm{E}^*} m(z)f_c(z)\rho(dz)}{\int_{E_+^*} m(z)\rho(dz)},\tag{6}$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии. Эти функции имеют вид

$$f_s(z)=\begin{cases}-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\notin I_d}}c_k-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\notin I_d}}c_k^p,\ z\in\left\{\,i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\right\}\in E_-^*,\ ,\\ \sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\notin I_d}}c_k^0-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\notin I_d}}c_k-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\notin I_d}}c_k^p,\ \ z\in\left\{\,i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\right\}\in E_+^*,\end{cases}$$

$$f_c(z)=\sum_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\notin I_d}}c_k+\sum_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\notin I_d}}c_k^p,\quad z\in\left\{\,i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\right\}\in E^*.$$

Здесь c_i^0, c_i и $c_i^p, i=\overline{1,N},$ соответственно доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО i-го элемента системы.

После преобразований формулы (6) приводятся к виду

$$S^*(\tau_1,...,\tau_N)=\frac{\sum\limits_{d\in D^*}\left[\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\notin I_d}}c_k^0-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\notin I_d}}c_k-\sum\limits_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\notin I_d}}c_k^p\right]\prod\limits_{k=1}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)}{\sum\limits_{d\in D^*}\prod\limits_{k=1}^{N}T_k^{(d_k)}(\tau_k)}=$$

 ISSN 1562-9945

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} \left[\sum_{\substack{j \in M_i \\ j \notin A(M_i)}} c_j^0 \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_i}}^{N} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right.\right.$$

$$\left. - \sum_{j \notin M_i} C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n \notin M_i \\ n \neq j}} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right] -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j \in \Phi_i \\ j \notin A(\Phi_i)}} C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n \in \Phi_i \\ n \neq j}} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right\} /$$

$$/ \left[\sum_{i=1}^{\omega} \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_i}}^{N} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) + \sum_{i=1}^{s} \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod_{n \in \Phi_i} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right], \qquad (7)$$

$$C^*(\tau_1, ..., \tau_N) = \frac{\sum_{d \in D^*} \left[\sum_{\substack{k \in \Omega_d^0 \\ k \notin I_d}} c_k + \sum_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \notin I_d}} c_k^p \right] \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k)}{\sum_{d \in D_+^*} \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}(\tau_k)} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{j \notin M_i} C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n \notin M_i \\ n \neq j}} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j \in \Phi_i \\ j \notin A(\Phi_i)}} C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i}}^{N} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n \in \Phi_i \\ n \neq j}} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right\}$$

$$/ \left[\sum_{i=1}^{\omega} \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_i}}^{N} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) \right] \qquad (8)$$

Здесь $C_i\left(\tau_i\right) = \dfrac{c_i^p T_i^{(2)} + c_i T_i^{(0)}}{T_i^{(1)}}$ – средние удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования i-го элемента.

Оптимизация сроков проведения ТО элементов системы. Задача определения оптимальных сроков проведения ТО элементов с целью достижения наилучшего показателя качества функционирования системы сводится к задаче отыскания точек абсолютного экстремума

$\tau_i^u, \tau_i^s, \tau_i^c$ соответственно функций (5), (7) и (8). Достижение экстремумов функций при некоторых аргументах $\tau_j \to \infty$ означает, что проводить ТО элементов системы с соответствующими номерами нецелесообразно. В этом случае в формулах (5), (7) и (8) следует заменить $K_j(\infty)$ на $\dfrac{M\alpha_j}{M\alpha_j + M\beta_j}$, а $C_j(\infty)$ на $\dfrac{c_j M\beta_j}{M\alpha_j}$.

ТО цепочки последовательно соединённых элементов. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим систему из N последовательно соединённых элементов. Эта структура имеет один путь $M_1 = \{1,...,N\}$ и N сечений $\{\Phi_i\}_{i=1}^N = \{\{1\},\{2\},...,\{N\}\}$. Стационарные показатели качества функционирования системы определяются формулами

$$K_u^*(\tau_1,...,\tau_N) = \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{1-K_i(\tau_i)}{K_i(\tau_i)}\right]^{-1}, \qquad S^*(\tau_1,...,\tau_N) = \frac{\sum_{i=1}^N c_i^0 - \sum_{i=1}^N C_i(\tau_i)}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{1-K_i(\tau_i)}{K_i(\tau_i)}},$$

$$C^*(\tau_1,...,\tau_N) = \sum_{i=1}^N C_i(\tau_i), \qquad T_+^*(\tau_1,...,\tau_N) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{T_i^{(1)}(\tau_i)}},$$

$$T_-^*(\tau_1,...,\tau_N) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{T_i^{(0)}(\tau_i) + T_i^{(2)}(\tau_i)}{T_i^{(1)}(\tau_i)}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{T_i^{(1)}(\tau_i)}}.$$

Произведём конкретные расчёты для цепочки из трёх последовательных элементов. Пусть наработки на отказ и времена аварийных восстановлений элементов имеют распределения Эрланга с плотностями $f_i(t) = \lambda_i \dfrac{(\lambda_i t)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} e^{-\lambda_i t}$, $g_i(t) = \mu_i \dfrac{(\mu_i t)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} e^{-\mu_i t}$, $i = 1,2,3$.

Исходные данные и результаты расчетов приводятся в таблицах 1 и 2.

В таблице 2 через K_u^∞, S^∞, C^∞ обозначены соответствующие стационарные показатели функционирования системы в случае, если ТО элементов не проводится. Проведение ТО элементов при достижении ими оптимальных наработок улучшает показатели качества соответственно на $4{,}5\%$, $6{,}8\%$ и $38{,}3\%$.

Таблица 1

Исходные данные примера

№	λ_i	m_i	$M\alpha_i$	μ_i	$M\beta_i$	$M\beta_i^p$	c_i^0	c_i	c_i^p
1	0,5	6	12	4	1,5	0,5	5	3	2
2	0,2	4	20	2	2	1	7	2	1
3	0,1	5	50	0,5	10	4	3	2	1

Таблица 2

Результаты расчетов

τ_i^u	$K_u^{*\max}$	K_u^{∞}	τ_i^s	$S^{*\max}$	S^{∞}	τ_i^c	$C^{*\min}$	C^{∞}
7,747	0,733	0,702	7,424	10,513	9,842	6,343	0,601	0,975
22,099			19,489			11,192		
37,749			35,314			24,772		

Выводы. Построена модель ТО сложной системы с учётом возраста и отключением её элементов на основе полумарковского процесса с общим фазовым пространством состояний. Получены формулы для определения и оптимизации стационарных показателей качества функционирования системы для указанной стратегии ТО элементов системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байхелььт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхелььт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
2. Барлоу Р. Математическая теория надёжности/ Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Сов. радио, 1969. – 488 с.
3. Песчанский А.И. Техническое обслуживание монотонной системы с учётом наработки на отказ каждого элемента// А.И.Песчанский. – Оптимизация произв. процессов: Сб. науч. тр. – Севастополь. 2009. Вып.11.
4. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем/ В.С. Королюк, А.Ф. Турбин.– К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
5. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 209 с.
6. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Получено 15.02.2009г.