УДК 621-771

В.А. Гринкевич, Д.В. Коноводов, О.М. Кузьмина

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА ПРЯМОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Постановка проблемы. В настоящее время номенклатура кованых и штампованных поковок достигает более миллиона типоразмеров, и это количество неуклонно увеличивается. Следовательно, возрастают требования не только к качеству разрабатываемых технологических процессов, но и к оперативности их создания. В этих условиях существенна роль расчетных методов и, в частности, методов решения краевых задач пластического деформирования.

Необходимо также отметить, что современные численные методы решения краевых задач обработки металлов давлением при всей своей мощи и гибкости предполагают проведение большого количества последовательных приближений (итераций), каждая из которых требует большого количества вычислений. Даже на современных мощных персональных компьютерах время решения таких задач исчисляется часами и сутками, что не всегда является приемлемым, поскольку приводит к увеличению общего времени, необходимого для проектирования новых технологических процессов.

Поэтому проблема разработки методов решения краевых задач пластического деформирования, которые сочетали бы точность современных численных методов с необходимой скоростью решения, достаточной в том числе для систем управления процессами обработки давлением в режиме реального времени, является актуальной.

Современные требования к математическим моделям процессов обработки металлов давлением предполагают более полный учет физико-механических процессов, протекающих в очаге пластической деформации. Помимо учета деформационного и скоростного упрочнения, тепловых процессов, анизотропии свойств и т. п., необходимо также принимать во внимание реальное соотношение

ISSN 1562-9945

между двумя составляющими деформации: деформацией объема и формоизменением.

Анализ существующих публикаций. Для учета этого фактора сегодня наиболее широко применяется вариационно-энергетический подход в сочетании с конечно-элементной дискретизацией, основные идеи и примеры реализации которого приведены, в частности, в [1].

Одной из фундаментальных проблем подобных моделей является сложность учета условия несжимаемости деформируемой среды – равенство нулю дивергенции вектора скорости ($\operatorname{div}\vec{V} = 0$). Для решения этой проблемы при использовании вариационно-энергетического подхода часто применяют метод штрафных функций. Слишком большие штрафные константы, как правило, ухудшают качество получаемых решений - условие несжимаемости подавляет вязкие свойства деформируемой среды. Другой способ - смешанная вариационная формулировка на основе принципа Маркова-Германна - имеет свои недостатки: снижается обусловленность матриц разрешающих систем алгебраических уравнений и, как следствие, уменьшается точность определения компонентов напряженного состояния.

Альтернативный подход, не имеющий этой проблемы, заключается в использовании метода граничных интегральных уравнений с дискретизацией граничными элементами. Заметим, что существует две основных формулировки данного подхода: прямая и непрямая [2]. Существуют также и некоторые промежуточные формулировки, например, метод разрывных смещений [3], однако, их рассмотрение выходит за рамки данной работы.

В работе [4] приведена формулировка краевой задачи пластического деформирования в рамках теории пластического течения и метода фиктивных нагрузок, для которой была получена система интегральных уравнений, линейная относительно неизвестных краевой задачи. Там же приведено решение тестовой задачи об осадке длинной полосы в штампах, где было показано, что предлагаемый метод позволяет в несколько раз снизить время получения решения краевой задачи.

Вместе с тем, разработанный подход не предполагает использование его в системах оперативного управления процессов обработки металлов давлением, в частности, свободной ковки. Для

 ISSN 1562-9945

этого необходимы алгоритмы, позволяющие получать решение краевой задачи в режиме реального времени. Другими словами, время решения краевой задачи, в случае использования соответствующего алгоритма для управления, например, процессом кузнечной вытяжки, не должно превышать одной секунды. Следовательно, время получения решения в этом случае необходимо снижать уже в десятки или сотни раз.

Постановка задачи. Целью данной работы является уточненное теоретическое доказательство сформулированных ранее утверждений [4] и разработка алгоритма, позволяющего быстро и с достаточной точностью определять значения неизвестных параметров напряженно-деформированного состояния непосредственно в точке границы деформированного тела.

Представляет интерес возможность получения решения только для выбранной части границы (или вообще только для одной точки границы) без решения краевой задачи в обычном понимании.

Изложение основных материалов исследования. Сформулируем и докажем следующее утверждение:

Если для линейно-вязкого (жесткопластического) тела, находящегося в состоянии равновесия под воздействием системы внешних нагрузок, корректно заданы граничные условия, то компоненты этих нагрузок, приложенные в заданной точке границы тела, могут быть определены непосредственно, т. е. без решения соответствующей краевой задачи.

Доказательство справедливости данного утверждения основано на полученной ранее [4] разрешающей системе линейных интегральных уравнений, которая при помощи метода граничных элементов преобразовывается к линейной системе алгебраических уравнений вида (1):

$$\left[K\right]\left\{P\right\}=\left\{B_V\right\} \tag{1}$$

где $\left[K\right]$ – матрица коэффициентов влияния; $\left\{P\right\}$ – вектор неизвестных интенсивностей внешних нагрузок, приложенных к каждому граничному элементу (в случае жесткопластической задачи к ним добавляются также компоненты дополнительных объемных сил); $\left\{B_V\right\}$ – вектор заданных граничных условий.

Далее переставим местами столбцы матрицы системы (1) таким образом, чтобы уравнения, записанные для заданной точки границы, оказались первыми. Запишем систему (1) в блочном виде, сгруппировав фиктивные нагрузки, приложенные в данной точке границы тела, и все остальные:

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \end{cases} \tag{2}$$

где $\left[A_{ij}\right]$ – являются подматрицами матрицы $\left[K\right]$; матрица $\left[A_{11}\right]$ и векторы $\left\{X_1\right\}$ и $\left\{B_1\right\}$ имеют размерность 3 для трехмерной задачи или 2 для двумерной задачи, соответственно.

Применяя тождественные преобразования, получаем выражение для определения вектора $\left\{X_1\right\}$ (для простоты выражения квадратные и фигурные скобки в выражениях (1) и (2) опущены):

$$X_1 = \left(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}\right)^{-1} \cdot (B_1 - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot B_2) \tag{3}$$

Таким образом, получено выражение, при помощи которого можно определить фиктивные нагрузки, приложенные в данной точке границы тела, не определяя все остальные, т. е. без решения соответствующей краевой задачи.

Отметим, что для эффективного управления процессом пластической деформации достаточно иметь информацию о кинематическом и напряженно-деформированном состоянии только в нескольких точках границы тела и внутри его. Например, при проведении процесса кузнечной вытяжки в программном режиме на автоматизированных ковочных комплексах желательно иметь информацию о скоростях течения в тех участках контура заготовки, которые могут вытечь либо в глубину выреза бойка, либо в зазор между бойками, либо образовать утяжину.

Кроме того, желательно также отслеживать напряженное состояние в «опасных» точках внутри заготовки. В этом случае управляющий компьютер может, оперативно изменяя величины деформаций и подач, выполнять протяжку заготовки с максимальной производительностью при гарантированном получении нужных размеров заготовки и отсутствии затеканий, зажимов металла, а также отсутствии рыхлот и трещин.

Сформулируем и докажем следующее утверждение:

 ISSN 1562-9945

Если для жесткопластического тела, находящегося в состоянии равновесия под воздействием системы внешних нагрузок, корректно заданы граничные условия, то неизвестные компоненты векторов скорости и напряжения в любой заданной точке его границы определяются непосредственно, т. е. без решения соответствующей краевой задачи.

1) Мысленно разобьем границу деформированного тела на конечное число участков – граничных элементов, к каждому из которых приложим равномерно распределенные кельвиновские сосредоточенные силы со значением коэффициента Пуассона, равным 0,5 (эти выражения приведены в многочисленной публикациях по теории упругости, например, в работе [5]). Приложим также систему дополнительных объемных сил для удовлетворения уравнениям связи в рамках теории течения Сен-Венана – Леви – Мизеса. Тогда, в силу доказанного ранее теоретического положения о краевой жесткопластической задаче [4], будут справедливы линейные системы интегральных уравнений для жесткопластического тела. Предположим, что дискретизация границы позволяет получить решение с требуемой точностью. Предположим также, что дискретизация границы такова, что в пределах каждого линейного участка, аппроксимирующего границу, распределение поверхностных фиктивных нагрузок будет близко к линейному. Проведя вычисление коэффициентов влияния от всех фиктивных нагрузок на компоненты кинематического и напряженно–деформированного состояния в заданной точке границы, получим стандартную разрешающую систему непрямого метода граничных элементов.

2) При помощи доказанного выше положения о фиктивной нагрузке определим компоненты фиктивных нагрузок, приложенных в заданной точке границы, в характерных точках границы, а также компоненты дополнительных объемных сил. Заметим, что определенные таким образом компоненты фиктивных нагрузок будут точными (в пределах погрешности дискретизации и ошибки округления).

3) Скорректируем коэффициенты влияния фиктивных нагрузок, приложенных в характерных точках границы, таким образом, чтобы соответствующий участок границы представлял собой уже один граничный элемент. В частности, при кусочно-линейной

аппроксимации границы соответствующий коэффициент влияния просто умножается на количество граничных элементов, на которое был первоначально разбит данный участок границы. Заметим, что если исходная дискретизация границы обеспечивает линейное распределение фиктивных нагрузок вдоль данного участка границы, то сведение этого линейного участка к одному граничному элементу будет статически эквивалентным.

4) С учетом этого запишем выражения для определения искомых компонентов векторов скорости и напряжения:

$$V_i^k = a_i^{k\cdot own} P_i^{k\cdot own} + a_i^{k\cdot other} P_i^{k\cdot other} + c_i^{k\cdot add} F_i^{k\cdot add} \qquad (4)$$

$$t_i^k = b_i^{k\cdot own} P_i^{k\cdot own} + b_i^{k\cdot other} P_i^{k\cdot other} + d_i^{k\cdot add} F_i^{k\cdot add} \qquad (5)$$

где a_i, b_i, c_i – коэффициенты влияния, полученные интегрированием фундаментальных решений Кельвина; индекс «own» относится к фиктивным нагрузкам, приложенным в заданной точке границы; индекс «other» относится к фиктивным нагрузкам, приложенным в характерных точках границы; индекс «add» относится к дополнительным объемным силам.

И, наконец, определим искомые компоненты векторов скорости и напряжений при помощи выражений (4) - (5). Поскольку в данных выражениях все фиктивные нагрузки и коэффициенты влияния получены путем тождественных преобразований и статически эквивалентных замен, то (с учетом сделанных допущений) полученные таким образом неизвестные компоненты векторов скорости и напряжения в заданной точке границы будут точным решением исходной краевой задачи в заданной точке границы. Кроме того, при этом не производится определение неизвестных по всей границе деформированного тела, т. е. не производится решение краевой задачи в обычном понимании. Следовательно, сформулированное утверждение можно считать справедливым.

Отметим, что это теоретическое положение может быть практически использовано при различных типах граничных условий, включая смешанные.

Результаты исследований. С учетом изложенного выше укрупненный алгоритм дискретного метода прямого решения содержит следующие шаги:

1. Задание геометрии тела (заготовки), исходной сетки граничных элементов, свойств, граничных условий.

 ISSN 1562-9945

2. Расчет коэффициентов влияния во всех точках границы (на основе решений Кельвина при ν=0,5).

3. Определение фиктивных нагрузок в заданной точке деформированного тела, в характерных точках границы и компонентов дополнительных объемных сил, выражение (3).

4. Коррекция коэффициентов влияния от фиктивных нагрузок, приложенных в характерных точках границы.

5. Определение искомых компонентов векторов скорости и напряжения в заданной точке границы из выражений (4) – (5).

6. Выполнение пунктов 3 – 5 для остальных характерных точек границы.

Необходимо отметить, что можно существенно сократить объем вычислительной работы, если построить исходную гранично-элементную сетку таким образом, чтобы целевые точки (точки, значения неизвестных в которых необходимо получить в результате решения краевой задачи) по возможности совпадали или были близки к характерным точкам границы. В этом случае количество требуемых арифметических операций сократится в несколько раз, а в некоторых случаях, и в несколько десятков раз. Это обстоятельство позволяет применить разработанный подход в системах оперативного управления процессами обработки металлов давлением, в частности, процессами свободной ковки на автоматизированных ковочных комплексах с программным управлением.

Выводы

1. Приведено теоретическое доказательство предложенного ранее дискретного метода прямого решения краевых задач пластического деформирования.

2. Изложен алгоритм реализации дискретного метода прямого решения краевых задач пластического деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данченко В.Н., Миленин А.А., Кузьменко В.И., Гринкевич В.А. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2005.- 448 с.

2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер.с англ. –М.: Мир, 1984. – 494 с.

3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. Grynkevych V., Danchenko V. On The Solution Of Metal Forming Boundary Value Problems In Real Time Mode // Proc. International Conference «Advances in metallurgical processes and materials». – Dnipropetrovsk, may 27-30. 2007. - Volumes 2. - P. 272-278.
5. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

Получено 09.06.2009г.

ISSN 1562-9945