УДК 539.3

Р.А. Искендеров

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗОК ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

**Введение.** Одна из основных причин, побуждающая конструкторов подкреплять тонкие оболочки ребрами, обусловлена необходимостью обеспечения их устойчивости под действием различного вида нагрузок, вызывающих появление сжимающих напряжений. При внезапном приложении к тонкостенным упругим системам нагрузок, вызывающих появление сжимающих усилий, превышающих статические критические значения, могут возникать движения, характеризующиеся монотонным возрастанием прогибов. При этом, как показано впервые в работе [1], наблюдаемые формы потери устойчивости не всегда совпадают с формами, соответствующими минимальным статическим критическим нагрузкам. Поэтому при решении рассматриваемых задач возникает необходимость принятия определенного критерия динамической потери устойчивости. Обычно такие критерии формулируется для неидеальных систем, имеющих начальные отклонения. Распространенные подходы к определению динамической критической нагрузки без учета влияния внешней среды достаточно подробно рассмотрены в работах [2,3,5], где приведены решения целого ряда задач такого типа.

В данной работе в рамках линейной задачи в качестве критерия динамической потери устойчивости принято аналитическое условие возможности интенсивного развития прогибов при действии ступенчатого импульса и при линейном законе убывания внезапно приложенной нагрузки. Рассмотрим замкнутая поперечно подкрепленная цилиндрическая оболочка, с заполнителем, шарнирно опертая по торцам, при действии осевых сжимающих сил и внешнего равномерного давления, которые в докритическом состоянии приводят к однородному напряженному состоянию,



 ISSN 1562-9945

характеризующемуся сжимающими напряжениями $\sigma_x$ и $\sigma_y$, изменяющимися во времени по тому же закону, что и соответствующие внешние нагрузки. Предполагается, что волновым характером распространения усилий можно пренебречь.

**Постановка задачи.** Полная энергии для рассматриваемой цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярной системой поперечных ребер, определяются по формулам:

$$\Pi = Э + A + K \tag{1}$$

Здесь

$$Э = \frac{\mathrm{Eh}^3}{24\left(1-\nu^2\right)R^2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta}\right)^2\right]\right\}d\xi d\theta +$$

$$+\frac{\mathrm{h}}{2\mathrm{ER}^2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}-\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \theta}\right)^2\right]\right\}d\xi d\theta +$$

$$+\frac{1}{2R^3}\sum_{j=1}^{k_1}\int_0^{2\pi}\left[E_s I_{ys}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+w\right)^2 + G_s I_{kp.s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta}\right)^2\right]\Bigg|_{\xi=\xi_j} d\theta +$$

$$+\sigma_x h\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}-\nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right\}d\xi d\theta + \frac{\sigma_y h}{2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+w\right)w d\xi d\theta;$$

$$K = \rho_0 h R^2\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\xi d\theta + \rho_s F_s R\sum_{i=1}^{k_1}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{\xi=\xi_j} d\theta$$

Здесь $\xi = \dfrac{x}{R},\ \theta = \dfrac{y}{R}$; $E_s, G_s$ - модуль упругости и сдвига материала поперечных ребер; $k_1$ - количество поперечных ребер; $\sigma_x -$осевые сжимающие напряжения; $\sigma_y -$кольцевые сжимающие напряжения; $u, v, w -$компоненты вектора перемещений оболочки; $\rho_0, \rho_s -$ плотности материалов оболочки и поперечного стержня соответственно, $\theta_j = \dfrac{2\pi}{k_1}j$, $h$ и $R -$толщина и радиус оболочки соответственно; $E, v -$ модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $\xi_1 = \dfrac{L_1}{r}$, $L_1$-длина оболочки, $F_s, I_{xs}, I_{kp.s}$- соответственно площадь и моменты инерции поперечного сечения поперечного стержня относительно оси $Oz$, а также момент инерции при кручении, $t$ – временная координата.

Влияния среды на оболочку определяется как внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке, и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A = -R^2 \int_0^{\xi_2} \int_0^{2\pi} q_z w d\xi d\theta . \tag{2}$$

Для определения $q_z$ применяется модель Пастернака [6]. Суть этой модели заключается в том, что влияния среды на оболочку на поверхности контакта определяется зависимостью

$$q_z = \left(\tilde{q} + \tilde{q}_0 \nabla^2\right) w = Kw \tag{3}$$

где $\nabla^2$ - двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта.

Уравнение неразрывности деформаций записывается в виде [5]:

$$\Delta\Delta\varphi = -ER \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \tag{4}$$

Прогиб оболочки при потере устойчивости ищем в виде

$$w = \sin d_m \xi \left[ w_1(t) \cos n\theta + w_2(t) \sin n\theta \right] \tag{5}$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ - функции времени, подлежащие определению.

Подставляя (5) в уравнение совместности деформаций (4), и решая его, относительно $\varphi$, находим выражение для функции напряжений

$$\varphi = -\frac{\sigma_x R^2 \theta^2}{2} - \frac{\sigma_y R^2 \xi^2}{2} + E \frac{d_m^2 R}{\left(d_m^2 + n^2\right)^2} \left(w_1 \cos n\theta + w_2 \sin n\theta\right) \sin d_m \xi \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (3), (2) и (1), на основании уравнения Лагранжа второго рода [6] можно получить два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения относительно параметров прогиба оболочки соответственно $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Оба этих уравнения можно представить в виде

$$\frac{d^2 \overline{w}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{p}{p_{mn}} - \frac{q}{q_{mn}}\right) \overline{w} = 0 \tag{7}$$

где под $\overline{w}$ понимается $w_1(t)$ или $w_2(t)$ в зависимости от того, каким из слагаемых выражения (5) аппроксимируется прогиб при потере устойчивости; $\omega_{mn}, p_{mn}$ и $q_{mn}$ - собственная частота колебаний ненагруженной системы, параметры критических значений статических продольных напряжений и внешнего давления, соответствующие рассматриваемой форме изгиба и определяемые в уравнение относительно $w_1$ по формулам:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E\Delta_{mn}}{\left(1-\nu^2\right)\rho_0 R^2}\cdot\frac{1}{1+2\overline{\rho}_s\overline{\gamma}_s\sigma_{2m}};\;\; p_{mn} = \frac{\Delta_{mn}}{d_m^2};\, q_{mn} = \frac{\Delta_{mn}}{n^2-1};$$

$$\Delta_{mn} = \frac{\left(1-\nu^2\right)d_m^4}{\left(d_m^2+n^2\right)^2} + a^2\left(d_m^2+n^2\right)^2 + \frac{\left[\tilde{q}-\tilde{q}_0\left(d_m^2+n^2\right)\left(1-\nu^2\right)R^2\right]\left(1-\omega_1^2\beta_0^2\right)}{Eh} +$$

$$+2\eta_{s1}^{(2)}\left(n^2-1\right)^2\sigma_{2m};\;\; q = -\frac{\sigma_y\left(1-\nu^2\right)}{E}; p = -\frac{\sigma_x\left(1-\nu^2\right)}{E}; a^2 = \frac{h^2}{12R^2};$$

$$\sigma_{2m} = \frac{1}{k_1+1}\sum_{j=1}^{k_1}\sin^2\frac{2\pi n}{k_1+1}j;\quad \eta_{s1}^{(2)} = \frac{E_s\left(I_{xs}+h_s^2F_s\right)\left(k_1+1\right)\left(1-\nu^2\right)}{EhL_1R^2}$$

Уравнение (7) определяет характер движения поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки. При этом существенное значение имеет закон изменения напряжений в системе, т.е. закон изменения внешней нагрузки во времени.

С целью формулировки критерия динамической потери устойчивости уравнение (7), при действии только одной из рассматриваемых нагрузок, удобно записать в виде

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2} + \omega_{mn}^2\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_{mn}}\right)\overline{w} = 0 \tag{8}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ – напряжения, вызываемые заданной внешней нагрузкой, $\sigma_{mn}$ – критическому значение этих напряжений при статическом нагружении, соответствующие рассматриваемой форме изгиба.

Предположим, что на оболочку действует внешняя нагрузка в виде ступенчатого импульса. В этом случае принимается, что в оболочке возникают равномерные сжимающие напряжения, равные $\sigma_0$ на интервале времени $0 \le t \le t_0$ и нулю вне этого интервала. Поскольку на основании анализа уравнения (8) можно заключить, что при $\sigma_0 < \sigma_{mn}$ движение системы имеет колебательный характер, рассматривается только случаи, когда $\sigma_0 > \sigma_{mn}$ и наблюдается монотонное возрастание прогибов. Задача состоит в определении такого времени $t$ и соответствующего ему значения нагрузки, при которых становится возможным интенсивное развитие прогибов.

Введя обозначение $a_{mn} = \omega_{mn}^2 \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{mn}} - 1 \right)$, уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \overline{w}}{dt^2} - a_{mn} \overline{w} = 0 \tag{9}$$

А его решение записать в форме, удобной для формулировки критерия динамической потери устойчивости:

$$\overline{w} = C_0 \left( 1 + \frac{a_{mn} t^2}{2} + \frac{a_{mn}^2 t^4}{4!} + \cdots \right) \tag{10}$$

Здесь принято, что начальные условия движения системы, т.е. при $t = 0$, характеризуются начальным отклонением с амплитудой $C_0$ при нулевой начальной скорости.

Зависимость прогиба от времени (10) является рядом по степеням квадрата величины $t\sqrt{a_{mn}}$. Поскольку квадрат этой величины заметно возрастет, когда она достигает значения, равного единице, в качестве условия безопасного по динамической устойчивости нагружения можно принять $t\sqrt{a_{mn}} < 1$, а за условие, определяющее начало интенсивного развития прогибов, - равенство $t\sqrt{a_{mn}} = 1$. Из последнего равенства определяется критическое время действия нагрузки

$$t_{kp} = \sqrt{\frac{\sigma_{mn}}{(\sigma_0 - \sigma_{mn})\,\omega_{mn}^2}} \tag{11}$$

соответствующее рассматриваемой форме потери устойчивости. Сравнивая критические времена для всех тех форм выпучивания, для которых $\sigma_{mn} < \sigma_0$, и выбирая из них наименьшее, можно определить предельное время действия внезапно приложенной нагрузки заданной интенсивности.

При линейном законе убывания внезапно приложенной нагрузки изменение сжимающих напряжений в поперечно подкрепленной оболочке определяется зависимостью, $\sigma = \sigma_0 - \gamma t$, где

 ISSN 1562-9945

$\sigma_0$ – напряжения, возникающие в момент приложения нагрузки, а $\gamma$ - скорость их убывания. Дифференциальное уравнение, определяющее характер движения системы, после подстановки в (8) $\sigma = \sigma_0 - \gamma t$ принимает вид

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2} - \left(a_{mn} - b_{mn}t\right)\overline{w} = 0\,, \quad b_{mn} = \frac{\gamma\omega_{mn}^2}{\sigma_{mn}} \tag{12}$$

Рассматриваются только те формы изгиба, для которых $\sigma_{mn} < \sigma_0$.

Полагая, что начало движения, обусловлено отклонением системы, амплитуда которого при нулевой начальной скорости равна $C_0$, решение уравнения (12) можно представить в виде

$$w = C_0\left[1 + \frac{a_{mn}t^2}{2}\left(1 - \frac{b_{mn}t}{3a_{mn}}\right) + \frac{a_{mn}^2 t^4}{4!}\left(1 - \frac{4b_{mn}t}{5a_{mn}}\right) + \cdots\right] \tag{13}$$

Последующие слагаемые в квадратных скобках имеют более сложный вид и, поскольку в дальнейшем изложении не используются, здесь не приведены.

Если внезапно приложенная нагрузка постоянна $(\gamma = 0)$, то $b_{mn} = 0$ и вместо (13) имеем уравнение (9), решение которого (10) рассмотрено выше, где в качестве критерия динамической потери устойчивости, определяющего начало интенсивного развития прогибов, принято $a_{mn}t^2 = 1$.

В случае $\gamma \neq 0$ по аналогии в качестве указанного критерия принимается условие, согласно которому для момента времени, когда сжимающие напряжения уменьшается до значения $\sigma_{mn}$, должно иметь место равенство

$$\frac{a_{mn}t^2}{2}\left(1 - \frac{b_{mn}t}{3a_{mn}}\right) = 1 \tag{14}$$

Из (14) и (15) следует, что с увеличением влияния жесткости заполнителя, значения критического времени и критического напряжения уменьшается.

Из условия $\sigma = \sigma_0 - \gamma t = \sigma_{mn}$ определяется время, соответствующее уменьшению сжимающих напряжений до значения $\sigma_{mn}$:

$$t = \frac{\sigma_0 - \sigma_{mn}}{\gamma} \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) с учетом принятых обозначений для $a_{mn}$ и $b_{mn}$, находим зависимость между $\sigma_0$ и $\gamma$

$$\sigma_0 = \sigma_{mn} + \sqrt[3]{\frac{3\sigma_{mn}\gamma^2}{2\omega_{mn}^2}} \qquad (16)$$

определяющую сочетание начального значения внезапно приложенной нагрузки и скорости ее падения, которое в соответствии с принятым критерием динамической потери устойчивости является границей безопасного нагружения системы. Для определения наименьших значений приведенных величин необходимо осуществить их минимизацию по параметрам волнообразования. Из (16) и (15) видно, что с увеличением жесткости заполнителя, напряжения, возникающие в момент приложения нагрузки и время, соответствующее уменьшению сжимающих напряжений до значения $\sigma_{mn}$ уменьшаются.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Пальчевский А.С., Поляков П.С., Прядко А.А. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и кручения. Прикладная механика, 1977, 13, № 12, с. 51-57.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва, Наука, 1972, 432 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. Москва, Наука, 1976, 416 с.
4. Латифов Ф.С., Исаев З.Ф. Устойчивость цилиндрические оболочки, усиленные перекрестной системой ребер заполненной средой при продольном осевом сжатии. Прожеединэс оф ИММ оф НАС оф Azerbaiжan., 2007,в.XXВЫ(XXXЫВ) , пп. 115-122.
5. И.Я.Амиро, В.А. Заруцкий. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. «Наукова думка», 1980, 367с.
6. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва, Стройиздат, 1954, 56 с.

Получено 24.02.2009г.

 ISSN 1562-9945