

УДК 624.046.3

С.В. Хорошилов

**ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ
ОРИЕНТАЦИЕЙ СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ
ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ. ЧАСТЬ 1**

В настоящее время уже достаточно четко видна перспектива истощения невозобновляемых источников энергии, таких как газ, нефть, уголь и других. К сожалению, в настоящее время энергетика сегодняшнего дня практически целиком базируется на таких источниках. В связи с этим все активнее идет поиск и освоение новых возобновляемых источников энергии. Одним из возможных таких источников является энергия Солнца. Перспективным направлением солнечной энергетики является создание солнечных космических электростанций (СКЭС) [1]. Такие электростанции будут располагаться на орбите для преобразования солнечной энергии в электрическую и ее передачи на Землю при помощи лазера или микроволнового луча.

Интерес к проблеме создания СКЭС в настоящее время в мире высок, при этом, следует отметить, что этими вопросами солнечной энергетики занимаются не только такие космические гиганты как США и Россия, но также страны Европейского союза, Япония, Турция.

Важной научно-технической проблемой при создании СКЭС является управление ориентацией большой системы в космосе с целью непрерывного слежения за Солнцем огромных солнечных батарей (СБ) и ориентации микроволновых пучков на наземные приемные антенны. Важность и необходимость тщательной проработки этой проблемы связана с тем, что СКЭС, как объект управления, существенным образом отличается от космических аппаратов, эксплуатируемых на орбите в настоящее время. Однако, несмотря на достаточно большое количество публикаций о различных аспектах создания СКЭС, работы, посвященные проблемам использования и разработки алгоритмического обеспечения управления ориентацией СКЭС, практически отсутствуют.

© Хорошилов С.В., 2009

Учитывая этот факт целью настоящей статьи является выделение задач, решение которых особенно важно при разработке систем управления ориентацией СКЭС, а также выбор возможных путей для их решения.

Важным направлением исследований по этой проблеме является анализ динамических характеристик СКЭС, ее управляемости и способов ориентации. Для решения этих задач необходимы математические модели, адекватно описывающие движение таких систем. Однако результаты, изложенные в существующих работах, например [2-3], не всегда могут быть непосредственно использованы при моделировании движения СКЭС.

Учет упругости в математической модели СКЭС как объекта управления. Проекты рассматриваемых энергосистем основываются на использовании различных конструкций больших размеров. В известных проектах рассматриваются размеры порядка десятков километров. Учитывая этот факт при получении модели динамики СКЭС необходим тщательный учет упругости элементов конструкции.

В соответствии с методами аналитической механики [4] движение СКЭС с упругими элементами можно представить в виде движения несущего тела (СКЭС + недеформированные элементы конструкции) и относительного движения носимых тел (частиц деформированных элементов конструкции), совершающих малые колебания около тех положений, которые они занимали бы в абсолютно твердом теле.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: $OXYZ$ - инерциальная система, связанная с центром масс Земли; $O_c x_c y_c z_c$ - связанная с центром масс станции; $O_i x_i y_i z_i$ - система, связанная с i -м упругим элементом.

Движение несущего тела определяется вектором скорости полюса \bar{V} и вектором угловой скорости $\bar{\omega}$. В качестве полюса выберем центр масс СКЭС с недеформированными элементами конструкции. Будем считать известной функциональную зависимость вектора смещения любой точки деформируемого элемента. Эта зависимость может быть представлена рядом по степеням обобщенных координат q_α

$$\bar{u} = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(t) \bar{U}_{\alpha}(x, y, z) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n q_{\alpha}(t) q_{\beta}(t) \bar{U}_{\alpha\beta}(x, y, z) + \dots, \quad (1)$$

где $\bar{U}_{\alpha}(x, y, z)$, $\bar{U}_{\alpha\beta}(x, y, z)$ - векторные коэффициенты.

В таком случае динамика СКЭС с упругими элементами может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\Sigma} \dot{\bar{\omega}} + \sum_{\alpha=1}^n \left(2\bar{\Lambda}_{\alpha} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{G}_{\alpha} \right) \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \bar{G}_{\alpha} \ddot{q}_{\alpha} = \\ = \bar{M}_{\Sigma} - \bar{\omega} \times \bar{J}_{\Sigma} \bar{\omega} - \sum_{\alpha=1}^n \bar{a}_{\alpha} \times \left(\dot{\bar{V}} + \bar{\omega} \times \bar{V} \right) q_{\alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(\bar{G}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \bar{G}_{\beta\alpha} q_{\beta} \right) \dot{\bar{\omega}} - 2\bar{\omega} \sum_{\beta=1}^n \bar{\Gamma}_{\alpha\beta} \dot{q}_{\beta} + \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \ddot{q}_{\beta} = \bar{Q}_{\alpha} - \\ - \left(\bar{a}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \bar{a}_{\alpha\beta} q_{\beta} \right) \left(\dot{\bar{V}} + \bar{\omega} \times \bar{V} \right) q_{\alpha} + \bar{\omega} \left(\bar{\Lambda}_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \bar{Q}_{\alpha\beta} q_{\beta} \right) \bar{\omega}, \quad \alpha = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \bar{J}_{\Sigma} = \bar{\theta} + 2 \sum_{\alpha=1}^n \bar{\Lambda}_{\alpha} q_{\alpha},$$

где $\bar{\theta}$ - постоянная часть тензора инерции СКЭС (тензор инерции станции с недеформированными упругими элементами).

Коэффициенты, входящие в уравнения (2), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\alpha} &= \int_m \bar{U}_{\alpha} dm, \quad \bar{a}_{\alpha\beta} = \int_m \bar{U}_{\alpha\beta} dm, \quad \bar{G}_{\alpha} = \int_m \rho \times \bar{U}_{\alpha} dm, \quad \bar{G}_{\beta\alpha} = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha} + \int_m \rho \times \bar{U}_{\beta\alpha} dm, \\ \bar{\Gamma}_{\beta\alpha} &= \int_m \bar{U}_{\beta} \times \bar{U}_{\alpha} dm, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta} = \int_m \bar{U}_{\alpha} \times \bar{U}_{\beta} dm, \\ \bar{\Lambda}_{\alpha} &= \int_m \left[E \bar{\rho} \cdot \bar{U}_{\alpha} - \frac{1}{2} (\overline{\rho U_{\alpha}} + \overline{U_{\alpha} \rho}) \right] dm, \\ \bar{Q}_{\alpha\beta} &= \int_m \left[E \bar{U}_{\alpha} \cdot \bar{U}_{\beta} - \frac{1}{2} (\overline{U_{\alpha} U_{\beta}} + \overline{U_{\beta} U_{\alpha}}) + E \bar{\rho} \cdot \bar{U}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\overline{\rho U_{\alpha\beta}} + \overline{U_{\alpha\beta} \rho}) \right] dm, \\ A_{\alpha\beta} &= \int_m \bar{U}_{\alpha} \cdot \bar{U}_{\beta} dm, \end{aligned}$$

где m - масса упругого элемента; $\bar{\rho}$ - вектор, характеризующий расстояние от центра масс станции до произвольной точки деформируемого элемента; E - единичная матрица.

На этапе проведения предварительных проработок при создании первых экспериментальных СКЭС движение плоских антенных

решеток и панелей СБ можно описать с помощью уравнений свободных колебаний однородных стержней и пластин. Традиционно отклонение таких элементов конструкции от своего недеформированного положения представляются в виде изгиба и кручения. Изгиб представляется в виде отклонения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, а кручение вокруг продольной оси.

Представим вектор смещения частиц \bar{u} при изгибе в связанной со стержнем системе координат в виде

$$\bar{u} = \bar{j} \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(t) \varphi_{\alpha}(x) + \bar{k} \sum_{\alpha=1}^n q_{n+\alpha}(t) \varphi_{\alpha}(x) - \frac{1}{2} \bar{i} \sum_{\alpha=1}^n [q_{\alpha}(t) q_{\beta}(t) + q_{n+\alpha}(t) q_{n+\beta}(t)] \int_0^x \varphi'_{\alpha}(\xi) \varphi'_{\beta}(\xi) d\xi,$$

где $\varphi_{\alpha}(x)$ - собственные формы изгибных колебаний стержней; \bar{i} , \bar{j} ; \bar{k} - единичные орты.

Смещение \tilde{u} произвольной точки стержня при кручении представим в виде ряда

$$\tilde{u} = (-\bar{j}z + \bar{k}y) \sum_{\alpha=1}^n r_{i\alpha}(t) Q_{\alpha}(x),$$

где $Q_{\alpha}(x)$ - собственные формы крутильных колебаний стержней.

Запишем систему уравнений (2) с учетом изгибно-крутильных колебаний N гибких элементов и n форм колебаний для каждого элемента.

$$\begin{aligned} & \bar{J}_{\Sigma} \dot{\bar{\omega}} + \sum_{i=1}^N \left[\sum_{\alpha=1}^n (2\bar{\Lambda}_{i\alpha} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{G}_{i\alpha}) \dot{q}_{i\alpha} + (2\bar{\Lambda}_{i,n+\alpha} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{G}_{i,n+\alpha}) \dot{q}_{i,n+\alpha} + \right. \\ & \left. + (2\tilde{\Lambda}_{i\alpha} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \tilde{G}_{i\alpha}) \dot{r}_{i\alpha} + \bar{G}_{i\alpha} \ddot{q}_{i\alpha} + \bar{G}_{i,n+\alpha} \ddot{q}_{i\alpha} + \tilde{G}_{i\alpha} \ddot{r}_{i\alpha} \right] = \\ & = \bar{M}_{\Sigma} - \bar{\omega} \times \bar{J}_{\Sigma} \bar{\omega} - \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n (\bar{a}_{i\alpha} q_{i\alpha} + \bar{a}_{i,\alpha+n} q_{i,n+\alpha} + \tilde{a}_{i\alpha} r_{i\alpha}) \times (\dot{\bar{V}} + \bar{\omega} \times \bar{V}), \quad (3) \\ & \left[\bar{G}_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^n (\bar{G}_{i\beta\alpha} q_{i\alpha} + \bar{G}_{i,n+\beta,\alpha} q_{i,n+\beta}) \right] \dot{\bar{\omega}} - 2\omega \sum_{\beta=1}^n \bar{\Gamma}_{i\alpha,n+\beta} \dot{q}_{i,n+\beta} + A_{i\alpha} \ddot{q}_{i\alpha} = Q_{i\alpha} - \\ & - \left(\bar{a}_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \bar{a}_{i\alpha\beta} q_{i\beta} \right) (\dot{\bar{V}} + \bar{\omega} \times \bar{V}) q_{\alpha} + \bar{\omega} \left(\bar{\Lambda}_{i\alpha} + \sum_{\beta=1}^n (\bar{Q}_{i\alpha\beta} q_{i\beta} + \bar{Q}_{i\alpha,n+\beta} q_{i,n+\beta}) \right) \bar{\omega}, \\ & \tilde{G}_{i\alpha} \dot{\bar{\omega}} - \tilde{A}_{i\alpha} \ddot{r}_{i\alpha} = \tilde{Q}_{i\alpha} - \bar{\omega} \tilde{Q}_{i\alpha} r_{i\alpha} \bar{\omega}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В приведенной системе уравнений (3) уравнение для обобщенных координат, характеризующих изгибные колебания из плоскости панели, не приведено по причине ограниченности объема статьи. Вид этого уравнения аналогичен уравнению для обобщенных координат, описывающих изгибные колебания в плоскости панели.

Входящие в уравнения (3) векторные и матричные коэффициенты, записанные в связанной со станцией системе координат, определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i\alpha}^{(c)} &= m_i n_\alpha \bar{b}_{i2}^{(c)}, \quad \bar{a}_{i,n+\alpha}^{(c)} = m_i n_\alpha \bar{b}_{i3}^{(c)}, \quad \bar{a}_{i\alpha\beta}^{(c)} = \bar{a}_{i,n+\alpha,n+\beta}^{(c)} = -\frac{m_i C_{\alpha\beta}}{l_i} \bar{b}_{i1}^{(c)}, \\ \bar{G}_{i\alpha}^{(c)} &= m_i \left(n_\alpha \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \times \bar{b}_{i2}^{(c)} + l_i d_\alpha \bar{b}_{i3}^{(c)} \right), \quad \bar{G}_{i\alpha\beta}^{(c)} = \bar{G}_{i,n+\beta,n+\alpha}^{(c)} = -\frac{m_i C_{\alpha\beta}}{l_i} \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \times \bar{b}_{i1}^{(c)}, \\ \bar{G}_{i\beta,n+\alpha}^{(c)} &= \bar{G}_{i\alpha,n+\beta}^{(c)} = m_i n_{\alpha\beta} \bar{b}_{i1}^{(c)}, \quad \bar{G}_{i,n+\beta,\alpha}^{(c)} = \bar{G}_{i,n+\alpha,\beta}^{(c)} = -m_i n_{\alpha\beta} \bar{b}_{i1}^{(c)}, \quad \bar{A}_{i\alpha} = \bar{A}_{i,n+\alpha} = m_i \\ \bar{\bar{L}}_{i\alpha}^{(c)} &= m_i \left\{ n_\alpha \left[E \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \cdot \bar{b}_{i2}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\overline{\rho_{i1}^{(c)} b_{i2}^{(c)}} + \overline{b_{i2}^{(c)} \rho_{i1}^{(c)}} \right) \right] - \frac{1}{2} l_i d_\alpha T_{ci} (\bar{i}\bar{j} + \bar{j}\bar{i}) T_{ic} \right\}, \\ \bar{\bar{L}}_{i,n+\alpha}^{(c)} &= m_i \left\{ n_\alpha \left[E \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \cdot \bar{b}_{i3}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\overline{\rho_{i1}^{(c)} b_{i3}^{(c)}} + \overline{b_{i3}^{(c)} \rho_{i1}^{(c)}} \right) \right] - \frac{1}{2} l_i d_\alpha T_{ci} (\bar{i}\bar{k} + \bar{k}\bar{i}) T_{ic} \right\}, \\ \bar{\bar{Q}}_{i\alpha\beta}^{(c)} &= m_i \left\{ n_{\alpha\beta} T_{ci} \bar{i}\bar{i} T_{ic} - d_{\alpha\beta} T_{ci} \bar{j}\bar{j} T_{ic} + (n_{\alpha\beta} - d_{\alpha\beta}) T_{ci} \bar{k}\bar{k} T_{ic} + \right. \\ &+ \left. \frac{C_{\alpha\beta}}{l_i} \left[E \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \cdot \bar{b}_{i1}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\overline{\rho_{i1}^{(c)} b_{i2}^{(c)}} + \overline{b_{i2}^{(c)} \rho_{i1}^{(c)}} \right) \right] \right\}, \\ \bar{\bar{Q}}_{i,n+\alpha,n+\beta}^{(c)} &= m_i \left\{ n_{\alpha\beta} T_{ci} \bar{i}\bar{i} T_{ic} + (n_{\alpha\beta} - d_{\alpha\beta}) T_{ci} \bar{j}\bar{j} T_{ic} - d_{\alpha\beta} T_{ci} \bar{k}\bar{k} T_{ic} - \right. \\ &- \left. \frac{C_{\alpha\beta}}{l_i} \left[E \bar{\rho}_{i1}^{(c)} \cdot \bar{b}_{i1}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\overline{\rho_{i1}^{(c)} b_{i1}^{(c)}} + \overline{b_{i1}^{(c)} \rho_{i1}^{(c)}} \right) \right] \right\}, \\ \bar{\bar{Q}}_{i,n+\alpha,\beta}^{(c)} &= \bar{\bar{Q}}_{i,\alpha,n+\beta}^{(c)} = \frac{1}{2} m_i n_{\alpha\beta} T_{ci} (\bar{j}\bar{k} + \bar{k}\bar{j}) T_{ic}, \quad \tilde{\bar{G}}_{i\alpha}^{(c)} = J_i \tilde{n} \bar{b}_{i1}^{(c)}, \quad \tilde{\bar{A}}_{i\alpha} = J_i, \\ \tilde{\bar{Q}}_{i\alpha}^{(c)} &= J_i T_{ci} \left[E - \frac{1}{2} (\bar{j}\bar{j} + \bar{k}\bar{k}) \right] T_{ic}, \end{aligned}$$

где m_i , l_i - масса и длина стержня соответственно; J_i - момент инерции стержня относительно продольной оси; T_{ci} - матрица перехода от системы координат $O_i x_i y_i z_i$, связанной с i -м стержнем к системе $O_c x_c y_c z_c$; $\bar{b}_{i1}^{(c)}$, $\bar{b}_{i2}^{(c)}$, $\bar{b}_{i3}^{(c)}$ - векторы-столбцы матрицы T_{ci} ; $\bar{\rho}_{i1}^{(c)}$ - радиус-вектор, соединяющий центр масс станции с точкой крепления

стержня; $\bar{\rho}_{i2}^{(c)}$ - радиус-вектор, соединяющий точку крепления стержня с произвольной точкой стержня.

При вычислении коэффициентов, интегрирование по массе заменяется интегрированием по безразмерному параметру.

С учетом этого введены следующие обозначения интегралов

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \int_0^1 \varphi_\alpha(s) ds, \quad d_\alpha = \int_0^1 s \varphi_\alpha(s) ds, \quad n_{\alpha\beta} = \int_0^1 \varphi_\alpha(s) \varphi_\beta(s) ds, \\ c_{\alpha\beta} &= \int_0^1 \int_0^s \varphi'_\alpha \varphi'_\beta d\xi ds, \quad d_{\alpha\beta} = \int_0^1 s \int_0^s \varphi'_\alpha \varphi'_\beta d\xi ds, \quad \tilde{n}_\alpha = \int_0^1 Q_\alpha(s) ds, \\ \tilde{n}_{\alpha\beta} &= \int_0^1 Q_\alpha(s) Q_\beta(s) ds, \quad n_{\alpha\beta} = \tilde{n}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера.

Система уравнений (3) может быть упрощена. Для этого необходимо пренебречь рядом членов, влияние которых на динамику незначительно. Так можно пренебречь смещением центра масс при колебаниях упругих элементов. Это приводит к обнулению следующих коэффициентов: $\bar{a}_{i\alpha}^{(c)}$, $\bar{a}_{i,n+\alpha}^{(c)}$, $\bar{a}_{i\alpha\beta}^{(c)}$, $\bar{a}_{i,n+\alpha,n+\beta}^{(c)}$. В целом ряде случаев можно не учитывать влияние колебаний упругих элементов на моменты инерции системы. Тогда равны нулю коэффициенты $\bar{\bar{A}}_{i\alpha}^{(c)}$, $\bar{\bar{A}}_{i,n+\alpha}^{(c)}$, $\bar{\bar{Q}}_{i\alpha\beta}^{(c)}$, $\bar{\bar{Q}}_{i,n+\alpha,n+\beta}^{(c)}$, $\bar{\bar{Q}}_{i,\alpha,n+\beta}^{(c)}$.

Можно пренебречь в выражении (1) квадратичной составляющей, учитывающей смещение поперечного сечения стержня вдоль продольной оси при изгибе. В этом случае равны нулю $\bar{G}_{i\beta\alpha}^{(c)}$, $\bar{G}_{i,n+\beta,n+\alpha}^{(c)}$, $\bar{G}_{i\beta,n+\alpha}^{(c)}$, $\bar{G}_{i,n+\beta,\alpha}^{(c)}$.

С учетом этих соображений система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\bar{J}}_\Sigma \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \left(\bar{G}_{i\alpha} \dot{q}_{i\alpha} + \bar{G}_{i,n+\alpha} \dot{q}_{i,n+\alpha} + \tilde{\bar{G}}_{i\alpha} \dot{r}_{i\alpha} \right) + \\ \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \left(\bar{G}_{i\alpha} \ddot{q}_{i\alpha} + \bar{G}_{i,n+\alpha} \ddot{q}_{i,n+\alpha} + \tilde{\bar{G}}_{i\alpha} \ddot{r}_{i\alpha} \right) = \bar{M}_\Sigma - \bar{\omega} \times \bar{\bar{J}}_\Sigma \bar{\omega}, \quad (4) \\ \bar{G}_{i\alpha} \dot{\bar{\omega}} + A_{i\alpha} \ddot{q}_{i\alpha} = Q_{i\alpha}, \\ \bar{G}_{i,n+\alpha} \dot{\bar{\omega}} + A_{i,n+\alpha} \ddot{q}_{i,n+\alpha} = Q_{i,n+\alpha}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{i\alpha} \dot{\tilde{\omega}} - \tilde{A}_{i\alpha} \ddot{r}_{i\alpha} = \tilde{Q}_{i\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}$$

Для более точного учета влияния упругих деформаций на динамику СКЭС целесообразно использовать метод конечных элементов (МКЭ) [5]. Так в работах [6-8] рассмотрены вопросы получения и решения уравнений динамики конструкций, состоящих из стержней, шарниров и точечных масс, с использованием метода конечных элементов. Такой подход может использоваться при анализе динамики различных конструкций космического применения.

Для иллюстрации использования МКЭ рассмотрим СКЭС, несущую одну СБ. Будем использовать шарнирно-стержневую модель СБ, изображенную на рис. 1. Разобьем стержневую конструкцию на элементарные стержни. Место жесткого соединения стержней будем обозначать одним узлом, а место шарнирного соединения двумя узлами с одинаковыми координатами. Пронумеруем соединения индексами ϕ , каждому узлу соответствует точка плоскости $x_1 O_1 y_1$ с координатами (x_1, y_1) .

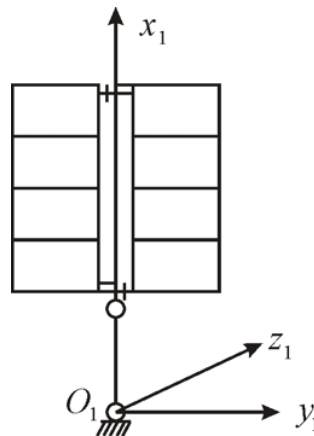


Рисунок 1 - Шарнирно-стержневая модель СБ

При построении вектора перемещений \bar{u} произвольной точки панели будем учитывать поворот сечений стержней при изгибе и при кручении вокруг своей оси. За обобщенные координаты ϕ -го стержня $q_\phi(t)$ принимаем компоненты вектора-столбца, зависящие только от времени, которые характеризуют упругие перемещения и углы поворота стержней:

$$q_\phi = \left| v_{xg}(t), v_{yg}(t), v_{zg}(t), p_{xg}(t), p_{yg}(t), p_{zg}(t), v_{xh}(t), v_{yh}(t), v_{zh}(t), \right. \\ \left. p_{xh}(t), p_{yh}(t), p_{zh}(t) \right|^T,$$

где $v_{xg(h)}(t), v_{yg(h)}(t), v_{zg(h)}(t)$ - перемещения точки в направлении осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 соответственно; $p_{xg(h)}(t), p_{yg(h)}(t), p_{zg(h)}(t)$ - поворот элементарного участка стержня в окрестности рассматриваемой точки относительно осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 соответственно; g, h - индексы, используемые для обозначения одного и другого конца стержней.

Примем, что стержни имеют квадратное поперечное сечение со стороной $2a$. Для стержней, параллельных оси O_1x_1 их погонная масса и длина равны соответственно m_g и l_g , а для стержней, параллельных оси O_1y_1 - m_h и l_h .

При вычислении интегралов, определяющих коэффициенты уравнения (1), используется правило

$$\int_m U(x, y, z) dm = \int_{-a}^a \left[\rho_g l_g \int_0^1 d\xi \int_{-a}^a U_g(x, y, z) dy + \rho_h l_h \int_0^1 d\zeta \int_{-a}^a U_h(x, y, z) dx \right] dz,$$

где l_g, ρ_g - длина и погонная масса стержней, расположенных параллельно оси O_1x_1 ; l_h, ρ_h - длина и погонная масса стержней, расположенных параллельно оси O_1y_1 ; $\xi = x_1/l_g, \zeta = y_1/l_h$ - безразмерные координаты.

Для стержней, параллельных оси O_1x_1 , погонная масса равна соответственно $m_g = 4a^2 \rho_g$, а для стержней, параллельных оси O_1y_1 - $m_h = 4a^2 \rho_h$.

В таком случае выражения коэффициентов для стержней, расположенных параллельно O_1x_1 , могут быть представлены следующим образом:

$$\bar{a}_\phi^g = m_g l_g \left| V_{xg}, J_{1x}, J_{2x} \right|^T, \quad \bar{G}_\phi^g = m_g l_g \left| J_{2x}, -J_{4x}, (J_{10x} - y_g V_{xg}^\phi) \right|^T,$$

$$\bar{\Gamma}_\phi^g = m_g l_g \left| J_{5x}, -(V_{xg}^\phi J_{8x} - V_{xg}^\beta J_{2x}), V_{xg}^\phi J_{9x} - V_{xg}^\phi J_{1x} \right|^T,$$

$$A_{\phi\beta} = m_p l_p \left(V_{xg}^\phi V_{xg}^\beta + J_{6x} + J_{7x} \right),$$

$$\bar{\Lambda}_\phi^g = m_g l_g \begin{vmatrix} y_g J_{1x} & -(y_g V_{xg}^\phi + J_{10x}) & -J_{4x}/2 \\ -(y_g V_{xg}^\phi + J_{10x})/2 & (x_g + l_g/2) V_{xp} & y_g J_{2x}/2 \\ -J_{4x}/2 & y_g J_{2x}/2 & y_g J_{1x} + (x_g + l_g/2) V_{xg}^\phi \end{vmatrix},$$

$$\bar{\bar{Q}}_{\phi\beta}^g = m_g l_g \begin{bmatrix} J_{6x} + J_{7x} & (V_{xg}^\phi J_{9x} + V_{xg}^\beta J_{1x})/2 & (V_{xg}^\phi J_{8x} + V_{xg}^\beta J_{2x})/2 \\ (V_{xg}^\phi J_{9x} + V_{xg}^\beta J_{1x})/2 & V_{xg}^\phi V_{xg}^\beta + J_{7x} & -J_{5x}/2 \\ (V_{xg}^\phi J_{8x} + V_{xg}^\beta J_{2x})/2 & -J_{5x}/2 & V_{xg}^\phi V_{xg}^\beta + J_{6x} \end{bmatrix}$$

Выражения для определения величин $J_{1x}, J_{2x}, \dots, J_{10x}$ имеют следующий вид:

$$J_{1x} = 0,5 \left[V_{yg}^\phi + V_{yh}^\phi + l_g (P_{zg}^\phi - P_{zh}^\phi) / 6 \right],$$

$$J_{2x} = 0,5 \left[V_{yg}^\phi + V_{yh}^\phi - l_g (P_{zg}^\phi - P_{zh}^\phi) / 6 \right], \dots,$$

$$J_{10x} = 0,5 \left[V_{yg}^\phi (x_g + 3l_g/10) + V_{yg}^\phi (x_g + 7l_g/10) + P_{zg}^\phi l_g (0.5x_g + l_g/5) / 3 - P_{zh}^\phi l_g (x_g/3 + l_g/5) / 3 \right].$$

Здесь величины $V_{xg(h)}^{\phi(\beta)}, V_{yg(h)}^{\phi(\beta)}, V_{zg(h)}^{\phi(\beta)}, P_{xg(h)}^{\phi(\beta)}, P_{yg(h)}^{\phi(\beta)}, P_{zg(h)}^{\phi(\beta)}$

представляют собой перемещения и углы поворота стержней в узлах конструкции, соответствующие формам ее собственных колебаний.

В настоящей статье выражения для величин $J_{3x}, J_{4x}, \dots, J_{9x}$, а также для коэффициентов стержней, параллельных оси O_1y_1 , не приведены по причине ограниченности ее объема.

Выражения коэффициентов для сосредоточенных масс m_g^m , расположенных в узлах стержневой конструкции, определяются с использованием выражений

$$\bar{a}_\phi^g = m_g^m \left| V_{xg}, V_{yg}, V_{zg} \right|^T, \quad \bar{G}_\phi^g = m_g^m \left| y_g V_{zg}, -x_g V_{zg}, x_g V_{yg}, -y_g V_{xg} \right|^T,$$

$$\bar{\Gamma}_{\beta\phi}^g = m_g^m \left| V_{yg} V_{zg} - V_{yg} V_{zg}, V_{xg} V_{zg} - V_{xg} V_{zg}, V_{xg} V_{yg} - V_{xg} V_{yg} \right|^T,$$

$$A_{\phi\beta}^g = m_g^m (V_{xg} V_{xg} + V_{yg} V_{yg} + V_{zg} V_{zg}),$$

$$\bar{\bar{\Lambda}}_\phi^g = m_g^m \begin{vmatrix} y_g V_{yg} & -(x_g V_{yg} + y_g V_{xg})/2 & -x_g V_{zg}/2 \\ -(x_g V_{yg} + y_g V_{xg})/2 & x_g V_{xg} & y_g V_{zg}/2 \\ -x_g V_{zg}/2 & y_g V_{zg}/2 & y_g J_{1x} + (x_g + l_g/2)v_{xg} \end{vmatrix}.$$

Суммируя найденные коэффициенты для стержней, расположенных параллельно осям O_1x_1 и O_1y_1 , а так же для сосредоточенных масс, получаем коэффициенты для всей панели СБ в проекциях на оси системы $O_1x_1y_1z_1$.

Редукция математической модели. Поскольку практически очень трудно, а порой и невозможно создавать системы управления для объектов, вектор состояния которых имеет несколько десятков переменных, может оказаться, что размерность математической модели упругой СКЭС будет излишне высокой. Так, например, размерность системы уравнений динамики СКЭС при использовании представления его упругих элементов в виде стержней определяется выражением

$$\Pi = 2N(n_1 + n_2 + n_3) + 3, \quad (5)$$

где N - число упругих элементов; n_1 , n_2 - число учитываемых форм изгибных колебаний в плоскости и из плоскости упругого элемента; n_3 - число учитываемых форм крутильных колебаний упругого элемента.

По аналогичной формуле может быть найден порядок системы уравнений и при использовании МКЭ. В этом случае при использовании большого количества узловых точек размерность становится чрезвычайно большой.

В случаях, когда размерность математической модели слишком велика и это вызывает определенные трудности при ее использовании, целесообразно применять методы понижения ее размерности. Существуют различные способы понижения порядка исходной системы. В работе [9] предлагается применение агрегирования переменных. В этом случае, если собственные частоты частей конструкции совпадают, обобщенные координаты, соответствующие этим частотам, можно усреднить и, таким образом, уменьшить размерность исходной системы уравнений.

Проиллюстрируем возможность агрегирования переменных для случая, когда на СКЭС установлено N одинаковых упругих элементов. Введем новые переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N G_{i1\alpha}^x q_{i\alpha} &= q_{x\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i2\alpha}^x p_{i\alpha} &= p_{x\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i3\alpha}^x r_{i\alpha} &= r_{x\alpha}, \\ \sum_{i=1}^N G_{i1\alpha}^y q_{i\alpha} &= q_{y\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i2\alpha}^y p_{i\alpha} &= p_{y\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i3\alpha}^y r_{i\alpha} &= r_{y\alpha}, \\ \sum_{i=1}^N G_{i1\alpha}^z q_{i\alpha} &= q_{z\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i2\alpha}^z p_{i\alpha} &= p_{z\alpha}, & \sum_{i=1}^N G_{i3\alpha}^z r_{i\alpha} &= r_{z\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{G}_{i1\alpha}^{(c)} = |\bar{G}_{i1\alpha}^x, \bar{G}_{i1\alpha}^y, \bar{G}_{i1\alpha}^z|$, $\bar{G}_{i2\alpha}^{(c)} = |\bar{G}_{i2\alpha}^x, \bar{G}_{i2\alpha}^y, \bar{G}_{i2\alpha}^z|$,
 $\bar{G}_{i3\alpha}^{(c)} = |\bar{G}_{i3\alpha}^x, \bar{G}_{i3\alpha}^y, \bar{G}_{i3\alpha}^z|$ - коэффициенты система уравнений (4) в проекциях на оси связанной системы координат; $p_{i\alpha}$ - обобщенная координата, характеризующая отклонения из плоскости упругого элемента.

Путем введения указанных новых переменных система уравнений (4) может быть модифицирована таким образом:

$$\bar{J}_\Sigma \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \sum_{\alpha=1}^n (\dot{\bar{q}}_\alpha + \dot{\bar{p}}_\alpha + \dot{\bar{r}}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^n (\ddot{\bar{q}}_\alpha + \ddot{\bar{p}}_\alpha + \ddot{\bar{r}}_\alpha) = \bar{M}_\Sigma - \bar{\omega} \times \bar{J}_\Sigma \bar{\omega},$$

$$\bar{G}_{1\alpha} \dot{\bar{\omega}} + \ddot{\bar{q}}_\alpha + \varepsilon_{1\alpha} \dot{\bar{q}}_\alpha + c_{1\alpha} \bar{q}_\alpha = 0,$$

$$\bar{G}_{2\alpha} \dot{\bar{\omega}} + \ddot{\bar{p}}_\alpha + \varepsilon_{2\alpha} \dot{\bar{p}}_\alpha + c_{2\alpha} \bar{p}_\alpha = 0,$$

$$\bar{G}_{3\alpha} \dot{\bar{\omega}} + \ddot{\bar{r}}_\alpha + \varepsilon_{3\alpha} \dot{\bar{r}}_\alpha + c_{3\alpha} \bar{r}_\alpha = 0, \alpha = \overline{1, n},$$

где $\bar{q}_\alpha = |q_{x\alpha}, q_{y\alpha}, q_{z\alpha}|^T$; $\bar{p}_\alpha = |p_{x\alpha}, p_{y\alpha}, p_{z\alpha}|^T$; $\bar{r}_\alpha = |r_{x\alpha}, r_{y\alpha}, r_{z\alpha}|^T$; $\bar{G}_{1\alpha}$, $\bar{G}_{2\alpha}$, $\bar{G}_{3\alpha}$ - тензорные коэффициенты.

Порядок такой модифицированной системы рассчитывается по следующей формуле:

$$P_m = 6(n_1 + n_2 + n_3) + 3. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (5) и (6) можно констатировать, что чем выше N тем эффективнее такой подход при редукции размерности.

Следует отметить, что введение новых координат затрудняет анализ движения упругих элементов. Однако, на практике больший интерес представляет влияние колебаний упругих элементов на динамику СКЭС, а не наоборот.

Определения упругих и диссипативных характеристик СКЭС. В работе [10] отмечается, что обеспечение стабилизации всех упругих собственных форм колебаний представляет собой сложную проблему. Кроме того известно, что удовлетворительная работа, а иногда и устойчивость активных систем управления с конечной шириной полосы частот, зависят от демпфирования. Эти соображения указывают на необходимость разработки методов более тщательного учета демпфирования при рассмотрении СКЭС.

Для определения диссипативных характеристик различных механических конструкций, в том числе и конструкций космического применения, широко используются экспериментальные исследования

[11]. Но применение такого подхода для СКЭС в виду их больших размеров затруднительно. Для оценки уровней демпфирования, которые можно ожидать при реализации СКЭС, может быть использован подход, основанный на анализе тех изменений коэффициентов демпфирования различных форм собственных колебаний, которые должны наблюдаться в результате изменения характерного масштаба длины в серии геометрически подобных конструкций из одного материала. Однако эффект влияния масштабного фактора на декремент колебаний еще изучен недостаточно. Поэтому особое внимание должно уделяться расчетным методам определения и уточнения параметров конструкции СКЭС. В работе [12] изложена процедура построения матрицы диссипации при анализе динамики конструкции с использованием метода конечных элементов. Однако для получения достоверных результатов целесообразно использовать методы параметрической идентификации.

На практике идентификация параметров упругости и диссипации конструкции может быть реализована с использованием следующего подхода. Пусть непрерывный идентифицируемый объект описывается следующим общим уравнением:

$$\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}, \bar{U}, \bar{G}, t), \quad (7)$$

где \bar{X} - вектор состояния объекта; \bar{U} - вектор управления; \bar{G} - вектор, составленный из неизвестных элементов матриц жесткости и диссипации.

Условия наблюдения представим в виде

$$\bar{Z} = H(\bar{X}, \bar{U}, t). \quad (8)$$

Характеристики настраиваемой модели и условия ее наблюдения в общем случае отличны от характеристик и функции наблюдения объекта

$$\dot{\bar{X}}^M = f(\bar{X}^M, \bar{U}, \bar{G}^M, t), \quad (9)$$

$$\bar{Z}^M = H(\bar{X}^M, \bar{U}, t). \quad (10)$$

Здесь и далее индексом M обозначены параметры, соответствующие настраиваемой модели.

Задачу идентификации можно сформулировать как управление вектором параметров модели \bar{G}^M , обеспечивающее достаточно малую норму невязки

$$\Delta \bar{Z} = \bar{Z} - \bar{Z}^M$$

в заданной области управляющих воздействий $\bar{U}(t)$. Функцию цели управления параметрами зададим в виде

$$Q_3 = |\bar{Z} - \bar{Z}^M|^2.$$

Алгоритм управления параметрами может быть основан на градиентном методе. Идея этого метода заключается в следующем: скорость изменения настраиваемых параметров устанавливается пропорциональной градиенту целевой функции

$$\dot{\bar{G}}^M = -K \left(\frac{\partial Q_3}{\partial \bar{G}^M} \right)^T = -K \left(\frac{\partial Q_3}{\partial \bar{Z}^M} \frac{\partial H}{\partial \bar{X}^M} \frac{\partial \bar{X}^M}{\partial \bar{G}^M} \right), \quad (11)$$

где K - матрица коэффициентов усиления, выбираемая из условия обеспечения сходимости процесса настройки; $\frac{\partial \bar{X}^M}{\partial \bar{G}^M} = X_a^M$ - матрица чувствительности.

Матрица чувствительности получается дифференцированием уравнения (9) по \bar{G}^M

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{X}^M}{\partial \bar{G}} = \frac{\partial f^M}{\partial \bar{X}^M} \frac{\partial \bar{X}^M}{\partial \bar{G}^M} + \frac{\partial f^M}{\partial \bar{G}^M}. \quad (12)$$

С учетом заданного управляющего воздействия $\bar{U} = U(t)$ замкнутая система уравнений состоит из выражений (7)-(10), алгоритма настройки параметров (11) и матричного уравнения (12).

В случае наличия устойчивости объекта проблема задания начальных условий для \bar{X}_a^M решается следующим образом. Задаются относительно произвольные начальные условия и интегрируется только одно уравнение (12) до достижения установившегося режима. Полученное решение и следует использовать в качестве начального для интегрирования всей замкнутой системы (7)-(12).

Приведенный алгоритм, полученный градиентным методом при локальной целевой функции, можно считать оптимальным лишь условно. Оптимизация по локальному критерию эквивалентна стремлению к наилучшему в каждый текущий момент времени. Хотя такой подход дает оптимальные результаты, он отличается от оптимального по интегральному критерию.

Таким образом, в настоящей статье обозначены наиболее важные задачи, которые необходимо будет решать при создании

системы управления ориентацией СКЭС. Для таких задач, как математическое описание упругих СКЭС, редукция размерности уравнений динамики станции, оценка диссипативных и упругих характеристик ее конструкции в обзорном стиле представлено методическое обеспечение, которое может служить основой при создании алгоритмического обеспечения системы управления ориентацией СКЭС. Исследование влияния упругих и диссипативных параметров на устойчивость объекта управления, вопросы наблюдаемости и управляемости при неполном векторе состояния, а также синтез алгоритмов управления ориентацией электростанции робастных по отношению к ряду неопределенностей будут рассмотрены во второй части статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванке В.А., Лесков Л.В., Лукьянов А.В. Космические энергосистемы. – М.: Машиностроение, 1990. – 144 с.
2. Згуровский М.З., Бидюк П.И. Анализ и управление большими космическими конструкциями. – Киев.: Наукова думка, 1997. – 451 с.
3. Механика больших космических конструкций/ Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. – М.:Факториал, 1997.-302 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. Галлагер Р. Метод конечных элементов. -М.: Мир, 1984. - 428 с.
6. Алпатов А.П., Хорошилов С.В., Шаповаленко В.В. О выводе уравнении колебаний сложных упругих стержневых конструкций // Космическая техника. Ракетное вооружение. Днепропетровск: ГКБ "Южное" им. М.К. Янгеля. - 1997. - вып. 2. - С. 75-92.
7. Хорошилов С.В., Шаповаленко В.В. К вопросу построения и решения уравнений колебаний криволинейных стержневых пространственных конструкций космического применения // Космическая наука и технология. 1999. – Т5, № 5/6 – С. 65–70.
8. Хорошилов С.В., Шаповаленко В.В. О расчете характеристик стержневой параболической антенны // Космическая техника. Ракетное вооружение. –Днепропетровск: ГКБ "Южное" им. М.К. Янгеля. - 1999. - Вып. 1. - С 87-95.

9. Хорошилов С.В., Шаповаленко В.В. Редукция размерности систем уравнений динамики упругих космических аппаратов. Техническая механика.– 1998. - Вып. 7. - С. 50-60.
10. Gevarter W.B. Basic Relations for Control of Flexible Vehicles // AIAA Journal. – 1970. – Vol 8. – P. 666–672.
11. Вопросы рассеяния энергии при колебаниях упругих систем. Труды научно-технического совещания / Под редакцией Г.С. Писаренко. – Киев.: Государственное издательство технической литературы УССР, 1962. – 223с
12. Алпатов А.П., Хорошилов С.В., Шаповаленко В.В. Учет диссипации энергии при анализе динамики больших конструкций космического применения. Техническая механика–2004. -Вып. 1. - С.15-23

Получено 29.01.2009г.