

УДК 519.86

В.Р. Петренко, К.А. Куделина, А.Г. Петров

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОБОБЩЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОГНОЗОВ**Введение**

Одним из путей повышения достоверности прогнозов является использование определенной избыточности, которая заключается в том, что прогнозирование интересующего показателя выполняется параллельно по нескольким альтернативным моделям с последующей обработкой полученных результатов. Использование набора моделей для прогнозирования одного и того же показателя приводит к получению набора числовых значений о поведении исследуемого показателя. На основе полученных результатов прогнозирования по набору моделей можно построить комбинированный прогноз, т.е. обобщенную оценку, полученную на основе объединения частичных прогнозов (чаще всего суммированием с определенными весовыми коэффициентами). Задача сводится к нахождению такого набора весовых коэффициентов, который обеспечивает минимальную ошибку комбинированного прогноза. Разные подходы к решению этой задачи были рассмотрены в работах [1-3,7].

В [1] предложена селективная модель построения комбинированного прогноза для одномерных временных рядов, согласно которой для получения комбинированного прогноза на $t+i$ шаге, где i – период упреждения, используется частная модель, которая обеспечила наилучший прогноз на t -шаге. В качестве критерия качества прогнозов использовался экспоненциально сглаженный квадрат ошибки прогнозов. Там же предложена модель комбинирования частных прогнозов с плавным переключением моделей, т.е. когда веса, с которыми комбинируются частные прогнозы, изменяются обратно-пропорционально средним экспоненциально взвешенным квадратам ошибок частных прогнозов.

В работе [7] рассмотрены вопросы использования комбинированной модели прогнозирования многомерных временных рядов, основанной на использовании ряда частных прогнозов, полученных с помощью различных методов (нейронных сетей,

© Петренко В.Р., Куделина К.А., Петров А.Г., 2009

нечетких систем, ARIMA-моделей и т.д.). Оптимальные оценки весовых коэффициентов комбинирования частных прогнозов получены с использованием уравнений Куна-Таккера. Теоретически доказано, что комбинированный прогноз не может быть хуже наилучшего из частных прогнозов.

Схематично процесс построения комбинированного прогноза может быть описан следующим образом. Пусть имеется m прогностических моделей одного и того же показателя Y . Эти модели, по предположению, различаются тем, что с разной степенью адекватности описывают разные стороны моделированного явления (показателя), что позволяет рассматривать их в качестве информационно-дополняющих.

В этом случае возникает так называемый спектр прогнозных оценок $(y_j, j = \overline{1, m})$, позволяющих построить обобщенный, комбинированный прогноз, который по своим свойствам будет превышать (или как минимум не ухудшать) лучший из исходных прогнозов. Улучшение прогноза является результатом действия так называемого синергетического эффекта системы. Обобщенный прогноз при этом определяется как

$$\hat{Y}_i(t+i) = \sum_{j=1}^m C_j y_{ij}(t+i), \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{j=1}^m C_j = 1, \quad C_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, m}$$

Целью комбинирования прогнозов является уменьшение величины ошибки прогнозирования (точнее, некоторой функции ошибки).

Комбинирование частных прогнозов может быть, вообще говоря, как линейным, так и нелинейным. В основном используются линейные модели (или линейные в логарифмах).

В данной работе рассматривается близкий по идеологии к [1] подход. Введено понятие меры качества частных прогнозов и в общем виде получено выражение, связывающее оценки параметров комбинирования частных прогнозов со значением меры их качества.

Цель работы – разработка адаптивного алгоритма построения обобщенного прогноза и сравнительный анализ влияния выбора меры качества частных прогнозов на качество комбинированного прогноза.

Описание адаптивного алгоритма обобщения прогнозов

Представим обобщенный прогноз в виде линейной формы

$$\hat{Y}_o(t) = C_1(t)\hat{Y}_1(t) + C_2(t)\hat{Y}_2(t) + \dots + C_m(t)\hat{Y}_m(t), \quad (1)$$

где $\widehat{Y}_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) – частные прогнозы; $C_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) – параметры обобщения; m – количество частных моделей прогнозирования.

Введем некоторую меру H , сосредоточенную на интервале $(0, \square)$ и позволяющую измерять степень точности прогнозов. Мету выберем так, чтобы ее значение уменьшалось с возрастанием точности прогнозов. Обозначим через $H_i(t)$ значение меры для i -ой частной модели прогнозирования.

Тогда оценки параметров C_i ($i = \overline{1, m}$) в (1) предлагается искать путем решения следующей системы уравнений:

$$C_i(t+1) = \frac{h(t)}{H_i(t)}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m C_i(t+1) = 1. \quad (3)$$

Определим параметр $h(t)$, для чего подставим в (3) уравнение (2). Получим

$$h(t) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{H_i(t)} \right]^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^m H_i(t)}{\prod_{i=2}^m H_i(t) + \prod_{i=1}^m H_i(t) + \dots + \prod_{i=1}^{m-1} H_i(t)} = \frac{\prod_{i=1}^m H_i(t)}{\sum_{k=1}^m \prod_{i=1, i \neq k}^m H_i(t)}. \quad (4)$$

Далее, подставляя (4) в (2), получаем

$$C_i(t+1) = \frac{\prod_{j=1}^m H_j(t)}{\sum_{k=1}^m \prod_{j=1, j \neq k}^m H_j(t)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу неотрицательности меры H , справедливо $C_i(t+1) \geq 0 \quad \forall i$.

Если в качестве H взять экспоненциально сглаженный квадрат ошибки прогноза, т.е.

$$H_j(t) = \bar{\varepsilon}_j^2(t) = \sum_{i=0}^t \gamma(1-\gamma)^i \varepsilon_j^2(t-i) = (1-\gamma)\bar{\varepsilon}_j^2(t-1) + \gamma\varepsilon_j^2(t), \quad (6)$$

где $\varepsilon_j(t) = Y(t) - \widehat{Y}_j(t)$,

то в этом случае данный алгоритм совпадает с алгоритмом, описанным в [1] для $m=3$. Заметим, что если предположить отсутствие корреляции $\varepsilon_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) и в качестве H взять дисперсию

ошибки прогноза, т.е. $H_i(t) = \sigma_{\varepsilon_i}^2(t)$, то, используя результаты [3], можно показать, что при этом оценки параметров обобщения, полученные с помощью (5), совпадают с оценками, определенными из условия

$$\bar{C}^*(t) = \arg \min[\bar{C}^T(t)\Sigma(t)\bar{C}(t) + \lambda(\bar{C}^T(t)I_m - 1)], \quad (7)$$

где $\bar{C}(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t))$;

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2(t) & & & 0 \\ & \sigma_{\varepsilon_2}^2(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{\varepsilon_m}^2(t) \end{pmatrix};$$

$$I_m^T = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_m.$$

Легко видеть, что эти оценки минимизируют дисперсию ошибки обобщенного прогноза при ограничении (3). Если в (6) выбрать γ невелико, то при этом $\bar{\varepsilon}_j^2(t)$ можно интерпретировать [1] как оценку дисперсии ошибки прогноза по j -ой частной модели. Таким образом, в случае отсутствия корреляции ошибок частных прогнозов, предложенный алгоритм позволяет получить квазиоптимальные оценки параметров обобщения. Заметим, что (5) можно также представить в виде

$$\bar{C}(t+1) = B^{-1}(t)I_m [I_m^T B^{-1}(t)I_m]^{-1}, \quad (8)$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & & & 0 \\ & H_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_m(t) \end{pmatrix}.$$

Помимо сглаженного среднего квадрата ошибки, в качестве $H_j(t)$ можно брать любую другую величину, которая характеризует адекватность частной модели реальному процессу. В частности, можно взять

$$H_j(t) = |K_j(t)| = \left| \frac{\bar{\varepsilon}_j(t)}{\tilde{\varepsilon}_j(t)} \right|, \quad (9)$$

где $\tilde{\varepsilon}_j(t) = (1 - \gamma)\tilde{\varepsilon}_j(t-1) + \gamma|\varepsilon_j(t)|$, а $\bar{\varepsilon}_j(t) = (1 - \gamma)\bar{\varepsilon}_j(t-1) + \gamma\varepsilon_j(t)$.

Величина $K(t)$ известна как следящий контрольный сигнал Тригга-Лича [4] и является мерой неадекватности модели реальному процессу [1].

Результаты экспериментального исследования алгоритма

Работа предложенного алгоритма исследовалась путем обобщения прогнозов числа солнечных пятен Вольфа [5] и коэффициента выхода годной продукции в производстве Cz-Si монокристаллов, полученных с помощью моделей, разработанных в [6].

Исходный ряд солнечных пятен Вольфа (Y1), состоящий из 100 наблюдений, был разбит на 2 части: 80 наблюдений использовались для оценивания моделей, и оставшиеся 20 – для оценки качества частных и комбинированного прогнозов.

Частные прогнозы ряда солнечных пятен были построены по трем ARIMA-моделям: (2,0,0), (3,0,0), (2,0,1).

Исходный ряд коэффициента выхода годной продукции (Y2), имеющий 41 наблюдение, полностью использовался для оценивания моделей и оценки качества частных и комбинированного прогнозов. Для получения частных прогнозов коэффициента выхода годной продукции применялись три ARIMA-модели, рассмотренные в работе [6]: (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1).

Для получения оценок параметров моделей использовались возможности пакета STATGRAPHICS. Параметры моделей рядов Y1, Y2 приведены в таблице 1.

Таблица 1

Оценки параметров моделей

Ряд	ARIMA (p, d, q)	Параметры				
		AR(1)	AR(2)	AR(3)	MA(1)	Const
Y1	(2,0,0)	1.42663	-0.725283	–	–	13.9165
	(3,0,0)	1.58429	-1.04098	0.221545	–	11.1055
	(2,0,1)	1.23502	-0.56728	–	-0.423565	15.5983
Y2	(1,0,0)	0.44405	–	–	–	0.321356
	(0,1,1)	–	–	–	0.683971	–
	(1,0,1)	0.74337	–	–	0.343091	0.149447

Для каждого ряда анализировалось влияние на качество обобщенных прогнозов разных мер точности прогнозов H . В качестве $H_j(t)$ были взяты:

- квадрат ошибки (Н1), $H_j(t) = (Y(t) - \hat{Y}_j(t))^2$;
- сглаженный квадрат ошибки (Н2). Значения вычислялись в соответствии с (6);
- дисперсия ошибки (Н3), $H_j(t) = \frac{t-1}{t}H_j(t-1) + \frac{1}{t}(Y(t) - \hat{Y}_j(t))^2$;
- сигнал Тригга-Лича (Н4) вычислялся в соответствии с (9).

Сравнение качества двух прогнозов оценивалось с помощью среднего квадрата ошибки.

Результаты исследования представлены в таблице 2.

Таблица 2

Средние квадраты ошибки прогнозов

№ моде-ли	ARIMA (p, d, q)	Y1	Y2
		Для частных прогнозов	
1	2,0,0	161.728	–
2	3,0,0	153.156	–
3	2,0,1	142.339	–
4	1,0,0	–	0.0049522
5	0,1,1	–	0.0050805
6	1,0,1	–	0.0048356
	H	Для обобщенных прогнозов	
	H1	155.0975	0.0048569
	H2	147.2043 ($\gamma = 0.01$)	0.0049008 ($\gamma = 0.01$)
	H3	147.188	0.0048998
	H4	141.920 ($\gamma = 0.763$)	0.0047727 ($\gamma = 0.3$)

Анализ результатов показывает, что обобщенный прогноз имеет меньший средний квадрат ошибки, чем частные прогнозы. Наименьший средний квадрат ошибки для обоих рядов имеет обобщенный прогноз с мерой точности Н4 – сигнал Тригга-Лича. В таблице 3 приведены результаты построения частных и обобщенного прогнозов с использованием меры Н4 для числа солнечных пятен Вольфа, а в таблице 4 – для коэффициента выхода годной продукции. Соответственно, на рис.1 и рис. 3 представлены значения исходных рядов и обобщенных прогнозов. На рисунках 2 и 4 представлены временные диаграммы, показывающие на каком участке какая частная модель дает более точный прогноз.

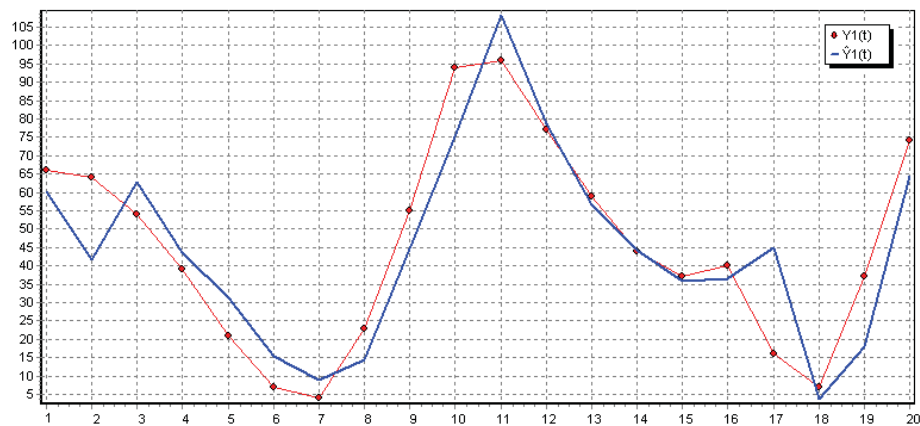


Рисунок 1 – Обобщенное прогнозирование ряда Y1



Рисунок 2 – Временная диаграмма

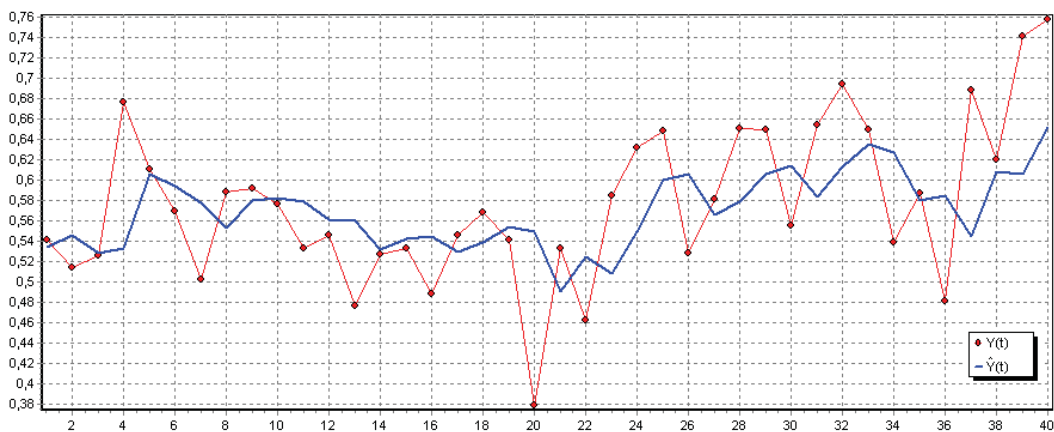


Рисунок 3 – Обобщенное прогнозирование ряда Y2



Рисунок 4 – Временная диаграмма

Таблица 3

Результаты прогнозирования для последовательности чисел
солнечных пятен Вольфа

№	Y1	(2,0,0)	(3,0,0)	(2,0,1)	\hat{Y}_0	№	Y1	(2,0,0)	(3,0,0)	(2,0,1)	\hat{Y}_0
1	66	60,938	55,827	63,818	60,134	11	96	108,13	107,87	108,73	108,242
2	64	38,447	43,206	43,575	41,743	12	77	82,696	77,530	75,445	78,558
3	54	57,352	65,064	65,85	62,755	13	59	54,140	53,987	56,894	56,565
4	39	44,536	44,656	40,964	43,571	14	44	42,241	45,691	45,676	44,201
5	21	30,390	30,859	32,299	31,208	15	37	33,897	36,455	35,760	35,868
6	7	15,590	15,741	14,624	15,321	16	40	34,789	36,992	36,859	36,575
7	4	8,672	8,975	9,101	8,916	17	16	44,146	45,709	45,340	45,082
8	23	14,546	14,808	14,407	14,587	18	7	7,731	3,012	0,240	3,727
9	55	43,828	44,931	45,374	44,716	19	37	12,298	14,402	18,030	18,024
10	94	75,7	75,185	74,554	75,144	20	74	61,625	65,982	65,358	64,328

Таблица 4

Результаты прогнозирования для последовательности коэффициентов
выхода годной продукции

№	Y2	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	\hat{Y}_0	№	Y2	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	\hat{Y}_0
	0,542	0,552	0,519	0,535	0,538		0,533	0,490	0,489	0,493	0,491
	0,514	0,562	0,526	0,550	0,546		0,463	0,558	0,503	0,532	0,525
	0,526	0,550	0,522	0,544	0,528		0,585	0,527	0,490	0,517	0,509
	0,677	0,555	0,524	0,547	0,533		0,632	0,581	0,520	0,561	0,550
	0,611	0,622	0,572	0,608	0,606		0,648	0,602	0,556	0,595	0,600
	0,570	0,593	0,584	0,603	0,594		0,528	0,609	0,585	0,613	0,606
	0,503	0,575	0,580	0,584	0,578		0,582	0,556	0,567	0,571	0,566
	0,589	0,545	0,556	0,551	0,554		0,651	0,580	0,572	0,578	0,579
	0,592	0,583	0,566	0,574	0,581		0,650	0,610	0,597	0,609	0,607
	0,577	0,584	0,574	0,584	0,583		0,556	0,610	0,614	0,618	0,614
	0,533	0,578	0,575	0,581	0,579		0,655	0,568	0,595	0,584	0,584
	0,546	0,558	0,562	0,562	0,561		0,695	0,612	0,614	0,612	0,613
	0,477	0,564	0,557	0,561	0,560		0,650	0,630	0,640	0,638	0,636
	0,527	0,533	0,532	0,533	0,533		0,539	0,610	0,643	0,628	0,627
	0,533	0,555	0,530	0,543	0,542		0,587	0,561	0,610	0,581	0,580
	0,489	0,558	0,531	0,549	0,545		0,481	0,582	0,603	0,584	0,586
	0,546	0,539	0,518	0,534	0,529		0,689	0,535	0,564	0,542	0,545
	0,569	0,564	0,527	0,551	0,540		0,620	0,627	0,604	0,611	0,608
	0,541	0,574	0,540	0,566	0,555		0,742	0,597	0,609	0,607	0,606
	0,379	0,562	0,540	0,560	0,549		0,758	0,651	0,651	0,655	0,652

Выводы

1. Предложенный в работе адаптивный алгоритм построения комбинированного прогноза обобщает ряд известных алгоритмов и при отсутствии корреляции ошибок частных прогнозов может обеспечить получение оптимальных оценок параметров обобщения.
2. Выбор меры качества частных прогнозов при определении оценок параметров обобщения влияет на качество обобщенного прогноза. Экспериментально показано, что наивысшая точность прогноза для анализируемых временных рядов достигается при выборе в качестве меры точности частных прогнозов сигнала Тригга-Лича.
3. Применение предложенного подхода к построению обобщенного прогноза позволяет повысить точность прогнозирования по сравнению с применением частных моделей прогнозирования.
4. Дальнейшие исследования целесообразно посвятить развитию предложенного подхода с целью применения для прогнозирования многомерных временных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования / Ю.П. Лукашин – М.: Статистика, 1979. – 251с.
2. Ершов Э.Б. Об одном методе объединения частных прогнозов / Э.Б. Ершов // Статистический анализ экономических временных рядов и прогнозирование. – М.: Наука, 1973. – С.87–105.
3. Diskinson I.P. Some Comments results in the combination of forecasts / I.P. Diskinson//Oper.Res.Quart.–1973. – V.24. – P.253-264.
4. Trigg D.W. Exponential smoothing with an adaptive response rate/ D.W.Trigg, A.E. Leach//Oper.Res.Quart.–1967.–V.18.–N.1.–P.258-269.
5. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974.– 406 с.
6. Петренко В.Р. Синтез ARIMA-моделей динамики технико-экономических показателей производства монокристаллического кремния / В.Р. Петренко, К.А. Куделина, Л.Г. Шепель // Нові технології. – 2006. – № 2 – С. 189–196.
7. Bodyanskiy Ye. An Optimal Algorithm for Combining Multivariate Forecasts in Hybrid Systems / Ye. Bodyanskiy, P. Otto, S. Popov [V. Palade, R.J. Howlett, and L.C. Jain (Eds.)] // KES-2003. – LNAI 2774. – 2003. – P. 967–972.

Получено 14.02.2009г.