УДК 004.4'22

С.М. Гриша, О.А. Іотко, Є.О. Роздольский

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАДАЧ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ СИСТЕМ КЛАСУ ERP/MRP ТА ЗАДАЧ БУЛЬОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ ОСОБЛИВОГО ВИГЛЯДУ

Вступ

Задача бульового програмування має велике практичне значення та широку область застосування. У загальному вигляді задача бульового програмування є NP-повною [1]. Ефективні алгоритми розв'язання таких задач без обмежень на нерівності та цільову функцію, наприклад, адитивний алгоритм, за прийнятний час дозволяють розв'язувати задачі розмірності у десятки змінних.

Проте у випадку, якщо обмеження та цільова функції мають певний характер, то можливо запропонувати такий алгоритм розв'язання який буде ефективно працювати на вхідних даних значно більшої розмірності.

У статті наводиться математична модель задачі вибору оптимальної функціональної конфігурації систем класу ERP/MRP з відношенням заміщення на ациклічному орграфі. Для моделей з безальтернативним забезпеченням [2,3] та з альтернативним забезпеченням наводяться постановки у вигляді задач бульового програмування з обмеженнями особливого вигляду.

Як показано в [2,3] алгоритм розв'язання задачі без альтернатив працює за поліноміальний час, а отже і еквівалентна їй задача бульового програмування розв'язується за поліноміальний час.

Для задачі з заміщеннями на двошаровому орграфі алгоритм розв'язання у вигляду комбінованого методу «генетичний алгоритм-редукція» є наближеним [4] і, як показано обчислювальним експериментом, працює ефективно на розмінностях 10^3 елементів [5].

Постановка задачі у моделі з відношенням заміщення

Розширимо модель з безальтернативним забезпеченням наступним чином.

 ISSN 1562-9945

Визначення 1. Відношенням заміщення називається бінарне відношення η на множині $\wp(\Omega)$ (множині всіх підмножин Ω) і позначається як $A \mapsto B$ (читається «A заміщує B»), де $A, B \subseteq \Omega$, для якого виконується:

1. $\forall B_j \subseteq B : A \mapsto B \Rightarrow A \mapsto B_j$ - множина A, що заміщує множину B, заміщує і всі її підмножини;

2. $A \mapsto B_1, A \mapsto B_2 \Rightarrow A \mapsto B_1 \bigcup B_2$ - множина A, що заміщує множини B_1 та B_2 в окремості, заміщує і їх об'єднання;

3. $A \subseteq C, A \mapsto B \Rightarrow C \mapsto B$ - множина C, що включає в себе множину A, яка заміщує множину B також заміщує множину B;

4. $A \mapsto B, B \mapsto C \Rightarrow A \mapsto C$ - транзитивність;

5. $A \mapsto A$ - рефлексивність;

6. $\forall A \neq \varnothing \quad \neg \varnothing \mapsto A$ - пуста множина не може заміщати непусту множину;

7. $A \mapsto B, (B \bigcup C) \mapsto D \Rightarrow (A \bigcup C) \mapsto D$ - заміщення заміщення.

Введемо наступні **позначення**:

$A^{<\#} = \{b \mid b \in \Omega, A \mapsto b\}$ − множина всіх елементів, що заміщуються множиною A;

$A^{\#} = A^{<\#} / A$ − множина всіх елементів, що заміщуються A за виключенням елементів з A.

Надалі будуть корисними деякі властивості відношення заміщення.

Твердження 1.

(а) $B \subseteq \Omega : A \mapsto B \Rightarrow B \subseteq A^{<\#}$

(б) $B \subseteq \Omega, B \bigcap A = \varnothing : A \mapsto B \Rightarrow B \subseteq A^{\#}$

(в) $A \subseteq A^{<\#}$

(г) $A \mapsto X, B \mapsto Y \Rightarrow (A \cup B) \mapsto (X \cup Y)$

(д) $A^{\#\#} = \varnothing$

Доведення:

(а) $A \mapsto B \Rightarrow \forall b \in B, A \mapsto b \Rightarrow \forall b \in B, b \in A^{<\#} \Rightarrow B \subseteq A^{<\#}$;

(б) $\begin{array}{l} B \subseteq \Omega, A \mapsto B = \varnothing \Rightarrow B \subseteq A^{<\#}; \\ B \subseteq A^{<\#}, A^{\#} = A^{<\#} / A, B \bigcap A \Rightarrow B \subseteq A^{\#} \end{array}$

(в) $A \mapsto A \Rightarrow A \subseteq A^{<\#}$;

$$A \mapsto X \Rightarrow A \cup B \mapsto X;$$
(г) $B \mapsto Y \Rightarrow A \cup B \mapsto Y;$
$$(A \cup B \mapsto X) \wedge (A \cup B \mapsto Y) \Rightarrow A \cup B \mapsto (X \bigcup Y)$$

$$A \mapsto A^{\#}, A^{\#} \mapsto A^{\#\#} \Rightarrow A \mapsto A^{\#\#};$$
(д) $A^{\#\#} = (A^{\#})^{<\#} / A^{\#} \Rightarrow A^{\#} \bigcap A^{\#\#} = \varnothing;$
$$A \mapsto A^{\#\#}, A^{\#} \bigcap A^{\#\#} \Rightarrow A^{\#\#} = \varnothing;$$

Визначення 2. Трійку $<\Omega, \gamma, \eta>$ будемо називати **конструктивним різноманіттям (**КР**)** систем у моделі з відношення заміщення. Причому для відношення заміщення та відношення забезпечення повинна виконуватися аксіома узгодженості КР:

$$A \mapsto B \Rightarrow {}^{o}B \subseteq {}^{o}A \qquad \textbf{(A1)}$$

Визначення 3. Узгодженою системою у моделі з відношення заміщення називається деяка множина $J \subseteq \Omega$, для якої виконуються аксіоми узгодженості:

$$J^{<o} \subseteq J^{<\#} \qquad \textbf{(A2)}$$

$$\forall j \in J : {}^{*}j \bigcap J \neq \varnothing \ \vee \ \exists A \subseteq J, j \in A, {}^{*}(A^{\#}) \bigcap J \neq \varnothing \qquad \textbf{(A3)}$$

або, що, з врахуванням властивостей заміщення, теж саме:

$$\forall j \in J : \exists A \subseteq J, j \in A, {}^{*}(A^{<\#}) \bigcap J \neq \varnothing \qquad \textbf{(A4)}$$

A2 заперечує відсутність хоча б одного елемента, що забезпечує, тобто присутні всі необхідні елементи з врахуванням відношення заміщення;

A3 заперечує відсутність елемента з ${}^{*}\Omega$ хоча б для одного елемента забезпечення, тобто в системі відсутні зайві елементи.

Той факт, що J є узгодженою системою в КР $<\Omega, \gamma, \eta>$ будемо також позначати $\mathrm{A}_{2,3}(\mathrm{J}, \mathrm{K})$ якщо в контексті мова йде про різне КР. В інших випадках позначення буде мати вигляд $\mathrm{A}_{2,3}(\mathrm{J})$

Визначення 4. Ефективною системою будемо називати таку узгоджену систему S, вартісна оцінка якої позитивна ($E(S) > 0$)

Визначення 5. Оптимальною системою назвемо таку узгоджену систему, для якої виконуються наступні аксіоми:

$$I \succ J \Leftrightarrow E(I) \geq E(J) \qquad \textbf{(A5)}$$

$$I \in \Omega^{opt} \Leftrightarrow (\forall J \in \{J \subseteq \Omega : A_{1,2}(J)\})(I \succ J) \qquad \textbf{(A6)}$$

ISSN 1562-9945

Тут:

$E:\wp(\Omega)\to R$ – **вартісна функція**, що кожній підмножині множини Ω ставить у відповідність дійсне число і обчислюється за формулою $E(J)=\sum_{j\in J} w_j$ причому виконується $\forall j\in {}^{*}\Omega : w_j \geq 0$ та $\forall j\in \Omega^{o} : w_j \leq 0$.

Ω^{opt} – множина оптимальних систем, які можна побудувати в КР $K=<\Omega,\gamma>$.

$I\succ J$ позначає той факт, що множина I не уступає по ефективності множині J. Легко помітити, що оптимальна система ефективна, але не навпаки. Таким чином, задача інформаційно-вартісного аналізу полягає в побудові Ω^{opt} для $<\Omega, \gamma>$, або деякого $\Omega_1\in\Omega^{opt}$.

Еквівалентність задач вибору оптимальної функціональної конфігурації та задач бульового програмування

Задача булева програмування у класичному вигляді [1] має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i=\overline{1,m} \tag{2}$$

$$x_j\in\{0,1\},\ j=\overline{1,n} \tag{3}$$

Зведення до неї задачі з безальтернативним забезпеченням [2,3] виглядає наступним чином:

$n=|\Omega|$

c_j - вартість елементу $j\in\Omega$ з обмеженнями накладеними на цільову функцію у попередніх підрозілах.

x_j - ознака чи включається елемент $j\in\Omega$ до оптимального рішення задачі. Якщо $x_j=1$ елемент $j\in\Omega$ - включається, якщо $x_j=0$ - не включається.

Нерівності (2) виглядають наступним чином:

$$\forall (j_1, j_2)\in\gamma,\ x_{j_1}\leq x_{j_2} \tag{4}$$

тобто $m=|\gamma|$, або, що теж саме:

$$\forall j\in\Omega,\ \left|J^{o}\right| * x_j \leq \sum_{i\in J^{o}} x_i \tag{5}$$

тобто $m = |\Omega|$.

Як строго доведено у [2;3], задача з обмеженнями такого характеру може бути розв'язана за поліноміальний час.

Розглянемо зведення задачі з відношенням заміщення до задачі бульового програмування. Проведемо зведення наступним чином:

Позначимо $\Xi = \{(A, j) \mid A \subseteq \Omega, j \in \Omega, j \notin A, A \mapsto j, \neg\exists B \subset A : B \mapsto j\}$ - множина таких пар вигляду «множина-елемент що може бути заміщений цією множиною», при яких множина-замістник є мінімальною та не рівна самому елементу.

Кожній парі $(A, j) \in \Xi$ поставимо у відповідність змінну $x_{(A,j)}$ - ознака «спрацювання» заміщення елементу j множиною A у оптимальному рішенні. Якщо 1 – вважається, що заміщення «спрацювало», якщо 0 - «не спрацювало».

Кожній парі $(A, j) \in \Xi$ відповідає значення вартісної функції $c_{(A,j)} = 0$.

$n = |\Omega| + |\Xi|$

c_j - вартість елементу $j \in \Omega$ з обмеженнями накладеними на цільову функцію у попередніх главах.

x_j - ознака чи включається елемент $j \in \Omega$ до оптимального рішення задачі. Якщо $x_j = 1$ елемент $j \in \Omega$ - включається, якщо $x_j = 0$ - не включається.

Тоді нерівності (2) виглядають наступним чином:

$$\forall (A, j) \in \Xi, \forall a \in A : x_{(A,j)} \le x_a \qquad (6)$$

$$\forall i \in \Omega, j \in i^o : x_i \le x_j + \sum_A x_{(A,j)} \qquad (7)$$

Розглянемо зведення задачі з альтернативним забезпеченням до задачі булева програмування. Проведемо зведення наступним чином:

Позначимо $\Psi = \{(j,c) \mid (j, j_1, c) \in \gamma\}$ - множину всіх пар вигляду «вершина-варіант її забезпечення».

Кожній парі $(j,c) \in \Psi$ поставимо у відповідність змінну $x_{(j,c)}$ - ознака вибору до оптимального рішення варіанту реалізації c елементу j.

Кожній парі $(j,c) \in \Psi$ відповідає значення вартісної функції $c_{(j,c)} = 0$.

 ISSN 1562-9945

$n = |\Omega| + |\Psi|$

c_j - вартість елементу $j \in \Omega$ з обмеженнями накладеними на цільову функцію у попередніх главах.

x_j- ознака чи включається елемент $j \in \Omega$ до оптимального рішення задачі. Якщо $x_j = 1$ елемент $j \in \Omega$ - включається, якщо $x_j = 0$ - не включається.

Тоді нерівності (2) виглядають наступним чином:

$$\forall j, (j,c) \in \Psi : x_j \leq \sum_{c,(j,c) \in \Psi} x_{(j,c)} \tag{8}$$

$$\forall (j, j_1, c) \in \gamma : x_{(j,c)} \leq x_{j_1} \tag{9}$$

або, що теж саме:

$$\forall (j,c) \in \Psi : \left| j^{oc} \right| x_{(j,c)} \leq \sum x_{j^{oc}} . \tag{10}$$

Висновки

У статті наведено модель задачі вибору оптимальної функціональної конфігурації систем класу ERP/MRP з відношенням заміщеннями на ациклічному орграфі. Показано еквівалентність моделей без альтернатив, з альтернативним забезпеченням, відношенням заміщення та задач бульового програмування з обмеженнями та цільовою функцією особливого вигляду.

Отримані результати мають велике практичне значення оскільки дозволяють розв'язувати задачі бульового програмування з обмеженнями та цільовою функцією особливого вигляду значно більшої розмірності, ніж при застосуванні класичних алгоритмів. Так для адитивного алгоритму розмірність вхідних даних при яких алгоритм працює за прийнятний час складає до 10^2 в той час як для задачі бульового програмування еквівалентній задачі вибору оптимальної функціональної конфігурації без альтернатив 10^4 з точним розв'язком, а для задачі бульового програмування еквівалентній задачі вибору оптимальної функціональної конфігурації з альтернативним забезпеченням та множинними заміщеннями 10^3 з розв'язком отриманим наближеним комбінованим алгоритмом методом вигляду «генетичний алгоритм редукція».

ЛІТЕРАТУРА

1. Гэри М, Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: "Мир", 1982. - 416 с., ил.

2. Гриша С.Н. Информационно-стоимостной анализ и синтез моделей компьютеризованного управления производственными системами : Дис. док. техн. наук. : спец. : 05.13.06 / Киевский политехнический институт. - К., 1991. - 340 с.
3. Галяпа А.А. Построение алгоритмической модели системы управления на основе информационно-стоимостного анализа : Дис. канд. техн. наук : спец. :05.13.06 / Киевский политехнический институт. – К., 1991. – 132 с.
4. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы/ Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. – М.: Горячая линия – Телеком – 2007 – 452 с.
5. Стратегічне планування функціональності ERP/MRP-систем із врахуванням множинних заміщень / Гриша С.М., Іотко О.А. // Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". – 2008 – № 6 – С. 20–24.

Одержано 29.10.2008р.