УДК 519.6

Е.Н. Ватченко, А.И. Деревянко

ВОЗБУЖДЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Введение. Неослабевающий интерес к исследованию классических колебательных систем и их моделей связан с тем, что наблюдаемые движения реальных систем происходят в ограниченном пространстве и, поэтому, для больших интервалов наблюдения проявляют повторяемость.

Например, метод молекулярной динамики описывает протяженность связи между атомами в молекулярных образованиях уравнением гармонического осциллятора, так как, нанометровый масштаб и длительности в десятки и сотни фемтосекунд - это та область, где еще хорошо работают законы классической механики. Задачи, возникающие при управлении молекулярными системами, сходны с задачами управления нелинейными механическими системами. При этом выбор механической модели молекулы определяет результат решения задач управления и прогноза свойств таких систем. Особый интерес для исследований представляет влияние характеристик колебаний атомов на топологию молекулярных систем.

Постановка задачи. Целью работы является определение закономерностей изменений внутренней энергии колебательной системы при переходе к хаотическим колебаниям. Направление исследований связано с моделированием процессов диссоциации молекулярных систем методами нелинейной молекулярной динамики [1].

Основная часть. Множество реальных объектов различной физической природы имеют одинаковое математическое описание. Это дает возможность создавать для них одинаковые математические модели и рассматривать друг друга как физические модели.

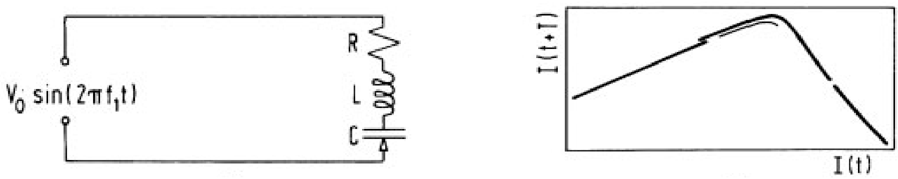
Удобными для исследования являются, например, нелинейные электрические цепи. Нелинейным элементом RLC-цепи является варикап, описываемый следующей нелинейной зависимостью между зарядом x и напряжением V(x) [2]

$$V(x) = (1 + \frac{V(x)}{0.6})^{0.43} \frac{x}{C_0} \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение, определяющее временную зависимость заряда, имеет вид

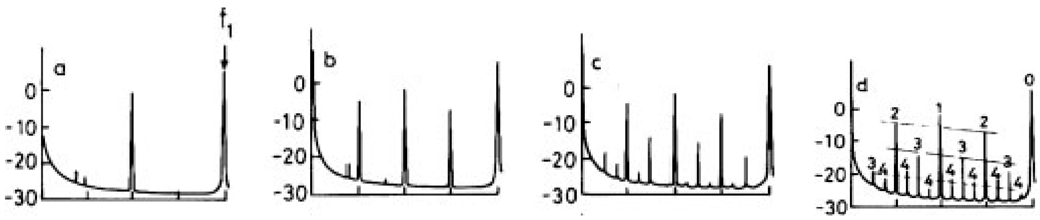
$$L\ddot{x} + R\dot{x} + V(x) = V_0 \sin(2\pi f_0 t) \qquad (2)$$

Для значений V0, играющих роль внешнего управляющего параметра r, последовательность значений тока заряда (рис. 1b) представляет собой одномерное унимодальное отображение. При этом, спектр мощности демонстрирует сценарий Фейгенбаума перехода к хаотическим колебаниям.



a) b)

Рисунок 1 - a) нелинейная RLC-цепь, возбуждаемая генератором гармонических колебаний с частотой f_0, - b) экспериментальное одномерное отображение дискретных (шаг $T=1/f_0$) значений тока в RLC-цепи



a) b) c) d)

Рисунок 2 – Изменение спектра мощности при увеличении значения V0 (рис. 1,а)

Для значений V0, играющих роль внешнего управляющего параметра r, последовательность значений тока заряда (рис. 1b) представляет собой одномерное унимодальное отображение. При этом, спектр мощности демонстрирует сценарий Фейгенбаума перехода к хаотическим колебаниям.

 ISSN 1562-9945

Таким образом, переход к хаотическим колебаниям - это процесс перехода к полигармоническим колебаниям. Отличительной особенностью такого перехода является возникновение на каждом этапе бифуркаций новых частот при сохранении диапазона [0- f1] значений этих частот (рис. 2). Следовательно, переход к хаотическим колебаниям - это преобразование дискретного спектра Фурье в непрерывный, что приводит к увеличению «внутренней» энергии системы.

Полная энергия E колебаний изолированной детерминированной системы представляет собой сумму кинетической – T и потенциальной – P энергий. Из закона сохранения энергии следует

$$\max T = E - \min P \tag{3}$$

Кинетическая энергия тела массой m при $P(t) = 0$, совершающей гармонические колебания с частотой ω будет

$$T(t) = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Тогда максимальное значение кинетической энергии, которой обладает колеблющееся с частотой ω тело массой m

$$\max T = \frac{mA^2\omega^2}{2} \tag{5}$$

Увеличение значения спектра мощности Фурье в точках суперустойчивости между двумя последовательными бифуркациями представляют последовательность [2]

$$E_1 = \frac{m{A_1}^2}{2}{\omega_1}^2 \tag{6}$$

$$E_2 = \frac{m{A_2}^2}{2}({\omega_{21}}^2 + {\omega_{22}}^2) \tag{7}$$

$$E_3 = \frac{m{A_3}^2}{2}({\omega_{31}}^2 + {\omega_{32}}^2 + {\omega_{33}}^2 + {\omega_{34}}^2) \tag{8}$$

$$E_k = \frac{m{A_k}^2}{2}\sum_{n=1}^{2^{k-1}}{\omega_{kn}}^2 \tag{9}$$

Таким образом, амплитуды гармоник спектра A_k имеют одинаковое значение для новых спектральных компонент, возникших в результате бифуркации удвоения периода.

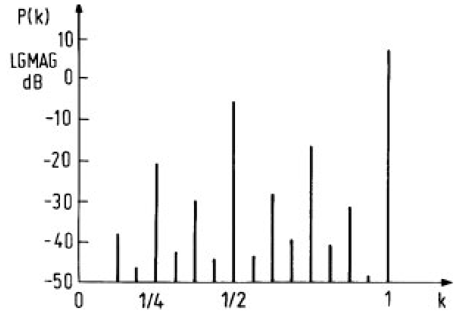


Рисунок 3 - Спектр мощности квадратичного

отображения $x_{n+1} = 1 - rx_n^2$ для $r = 1.401$

Амплитуды гармоник спектра мощности, полученные в результате бифуркации удвоения периода (рис. 3), образуют рекуррентную последовательность [3]

$$A_2^2 = \mu A_1^2 \tag{10}$$

$$A_3^2 = \mu A_2^2 = \mu^2 A_1^2 \tag{11}$$

$$A_k^2 = \mu A_{k-1}^2 = \mu^{k-1} A_1^2 \tag{12}$$

Тогда

$$E_k = \frac{mA_1^2}{2} \frac{\mu^{k-1}}{2^{2k}} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (2n-1)^2 \tag{13}$$

или учитывая значение суммы конечной последовательности квадратов нечетных целых чисел выражение (13) преобразуется к виду

$$E_k = \frac{mA_1^2 \omega_0^2}{3} \mu^{k-1} \frac{2^{2k}-1}{2^{k+2}} \tag{14}$$

Процесс перехода к хаотическим колебаниям по сценарию Фейгенбаума реализуется как бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода. Следовательно, энергия «накачанная» в тело массой m будет

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \tag{15}$$

Выражение (15) с учетом (14) представляет сумму двух бесконечных геометрических прогрессий со знаменателями

$$q_1 = 2\mu \quad \text{и} \quad q_2 = \mu/2 \tag{16}$$

Таким образом

$$E = \frac{mA_1^2 \omega_0^2}{2} \frac{1}{(1-2\mu)(2-\mu)}, \tag{17}$$

 ISSN 1562-9945

где ω_0 - частота возбуждаемая генератором гармонических колебаний (рис. 1), A_1 - амплитуда колебаний тела массой m после первой бифуркации (рис. 2а).

Значение E определяет энергию, запасенную телом массой m, в результате перехода к хаотическим колебаниям под действием внешнего гармонического воздействия $A \sin \omega_0 t$ и не учитывает диссипацию [4]. Относительное увеличение внутренней энергии при возбуждении хаотических колебаний определяется как

$$\eta = \frac{E}{E_1} = \frac{4}{(1-2\mu)(2-\mu)} = 2.2484\,. \tag{18}$$

Выводы. Переход к хаотическим колебаниям по сценарию удвоения периода вызывает накопления внутренней энергии (эффект «накачки» от внешнего источника) не столько за счет увеличения амплитуды, сколько за счет преобразования дискретного спектра в непрерывный. При этом диапазон частот значений спектра мощности остается неизменным, ограниченным значением частоты возбуждающих колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянко А.И., Ватченко Е.Н., Лысая Н.В. Управление хаотическим режимом унимодальных отображений. //Системные технологии, № 2(55), 2008.С. 165-168.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос.- М. Мир, 1988-240 с.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос.- М. Физ-мат. литература, 2001.- 296 с.
4. Ватченко Е.Н. Моделирование эволюции маятника, управляемого внешним моментом //Системные технологии, № 2(49), 2007.С. 177-180.

Получено 26.10.2008г.