УДК 519.873

А.И. Песчанский

КАЛЕНДАРНОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ

Введение. В процессе функционирования сложной технической системы ухудшаются характеристики её элементов. Одним из методов улучшения стационарных показателей качества функционирования является предупредительное техническое обслуживание (ТО) элементов. В [1] исследована стратегия ТО простой системы, известная под названием «восстановление блоками». Суть этой стратегии заключается в следующем. В случае отказа элемент подвергается аварийному восстановлению (АВ). Независимо от возраста элемента, в фиксированные моменты времени $\tau, 2\tau, ...,$ планомерно проводится его ТО. В [1] исследована интенсивность эксплутационных затрат при данной стратегии ТО без учета времени на АВ элемента. В данной работе указанная стратегия ТО переносится на сложные системы с монотонной структурой [1]. В общих предположениях относительно времен безотказной работы и восстановления элементов системы определяются стационарные и экономические показатели качества функционирования такой системы при указанной стратегии ТО ее элементов и устанавливаются оптимальные периодичности проведения ТО с целью достижения наилучших значений этих стационарных характеристик.

Постановка задачи и построение математической модели. Рассмотрим $N-$компонентную систему с монотонной структурой [1]. К таким системам относятся, например, последовательные, дублированные, мостиковые системы, системы «P из N», системы с раздельно-общим резервированием.

Время безотказной работы $i-$го элемента системы - случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \le t), i = \overline{1,N}$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно и начинается его (АВ), которое длится случайное время β_i с ФР

 ISSN 1562-9945

$G_i(t) = P(\beta_i \le t),\ i = \overline{1,N}$. Через заданный интервал времени τ_i после обновления i-го элемента системы, независимо от его состояния, проводится ТО этого элемента, длительность которого – СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t) = P\left(\beta_i^p \le t\right)$.Предполагается, что все СВ независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha_i, M\beta_i, M\beta_i^p$ Очереди на восстановление не возникает. Как после ТО, так и после АВ, все надежностные характеристики элементов полностью обновляются. Отключение и включение элементов в систему происходит мгновенно. Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО i-го элемента системы соответственно равны $c_i^0,\ c_i$ и $c_i^p,\ i = \overline{1,N}.$

Система находится в работоспособном состоянии тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из последовательных структур минимального пути [1] работоспособна. Система считается в отказе, если, по крайней мере, одна из параллельных структур минимального сечения [1] находится в нерабочем состоянии (по причине ТО или АВ ее элементов). Предполагается, что в результате АВ или ТО какого-либо элемента не происходит отключение тех работоспособных элементов, функционально связанных с отказавшим, которые не принадлежат более ни одному работоспособному пути.

Требуется определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящуюся на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Определить промежутки времени τ_i между окончанием предыдущих и началом последующих ТО элементов, для которых указанные показатели качества функционирования системы имели бы оптимальные значения.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [2,3]

$$E=\left\{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ i=\overline{1,N}\right\},$$

где компоненты вектора $\overline{d}=(d_1,...,d_N)$ указывают на «физические» состояния элементов: $d_k=1$ - k-й элемент находится в работоспособном состоянии, $d_k=0$ - в состоянии АВ, $d_k=2$ - в состоянии ТО; i - номер элемента, изменившего свое «физическое» состояние последним. Компоненты вектора $\overline{x}^{(i)}$ фиксируют время с момента последнего изменения состояния i-го элемента до ближайших моментов изменения состояний соответственно остальных элементов $(x_i=0)$, причем, если $d_k=1$, то x_k - время до ближайшего аварийного отказа k-го элемента. Компоненты вектора $\overline{u}=(u_1,...,u_N)$ - времена, прошедшие с моментов окончания последних ТО элементов. Если $d_k=2$, то считается, что $u_k=\tau_k$. В момент восстановления работоспособности i-го элемента после его ТО считается, что $u_i=0$.

Времена пребывания системы в состояниях определяются формулами

$$\theta_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}=\gamma_i^{(d_i)}\wedge\underset{k\neq i}{\Lambda}x_k\underset{k\notin\Omega_d^2}{\Lambda}\left(\tau_k-u_k\right),$$

где Λ - знак минимума, Ω_d^2 - совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных 2, $\gamma_i^{(d_i)}=\begin{cases}\alpha_i,\ d_i=1,\\ \beta_i,\ d_i=0,\\ \beta_i^p,\ d_i=2.\end{cases}$

Опишем вероятности (плотности вероятностей) переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n,\ n\geq 0\}$. Заметим, что i-й элемент из физического состояния 1 может перейти в состояние 0 (АВ) и в состояние 2 (ТО), из состояния 0 в состояние 1 или 2, а из состояния 2 – только в состояние 1.

Обозначим $z_i=\underset{k\neq i}{\Lambda}x_k\wedge\underset{k\notin\Omega_d^2}{\Lambda}\left(\tau_k-u_k\right)$. Из состояния $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ i=\overline{1,N}$, переходы бывают следующих типов:

а) в совокупность состояний $i\overline{d'}\ \overline{x}^{(i)}\overline{u'},\ d_i'\neq 2$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}}=\psi_i^{(d_i)}(z_i-y)$, где $y<z_i$, $\psi_i^{(d_i)}(\cdot)$ - плотность распределения вероятностей СВ $\gamma_i^{(d_i)}$, $d_k'=d_k,\ x_k'=x_k-(z_i-y),\ k\neq i,$

 ISSN 1562-9945

$$u_k{}' = \begin{cases} u_k + z_i - y, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \qquad k \neq i, \qquad u_i{}' = \begin{cases} u_i + z_i - y, & i \notin \Omega_d^2, \\ 0, & i \in \Omega_d^2, \end{cases}$$

б) в совокупность состояний $i\overline{d'}\,\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}$, $d_i = 1$ или $d_i = 0$, $d_i' = 2$, с вероятностью перехода $P_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}} = \overline{\Psi}_i^{(d_i)}(\tau_i - u_i)$, где $d_k{}' = d_k$, $x_k{}' = x_k - (\tau_i - u_i)$, $k \neq i$, $\Psi_i^{(d_i)}(\cdot)$ - ФР СВ $\gamma_i^{(d_i)}$,

$$u_k{}' = \begin{cases} u_k + \tau_i - u_i, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases}$$

в) в совокупность состояний $j\overline{d'}\,\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}$, $j \neq i$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{j\overline{d'}\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}} = \psi_i^{(d_i)}(z_i + y)$, где $y > 0$, $d_k' = d_k$, $k \neq j$, $x_i' = y$, $x_k' = x_k - z_i$, $k \neq i, j$,

$$u_j{}' = \begin{cases} u_j + z_i, & j \notin \Omega_d^2, \ d_j' \neq 2, \\ \tau_j, & j \notin \Omega_d^2, \ d_j' = 2, \\ 0, & j \in \Omega_d^2, \end{cases} \qquad u_k{}' = \begin{cases} u_k + z_i, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \qquad k \neq j.$$

Предположим, что для ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения $\rho(\cdot)$, тогда оно определяется формулами

$$\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right) = \begin{cases} \rho h_i^{(0)}(u_i) \prod\limits_{\substack{k \in \Omega_d^0 \\ k \neq i}} v_k^{(0)}(u_k, x_k) \prod\limits_{k \in \Omega_d^1} v_k^{(1)}(u_k, x_k) \prod\limits_{k \in \Omega_d^2} \overline{G}_k^p(x_k), \ i \in \Omega_d^0, \\ \rho h_i^{(1)}(u_i) \prod\limits_{k \in \Omega_d^0} v_k^{(0)}(u_k, x_k) \prod\limits_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \neq i}} v_k^{(1)}(u_k, x_k) \prod\limits_{k \in \Omega_d^2} \overline{G}_k^p(x_k), \ i \in \Omega_d^1, \ u_i \neq 0, \\ \rho \prod\limits_{k \in \Omega_d^0} v_k^{(0)}(u_k, x_k) \prod\limits_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \neq i}} v_k^{(1)}(u_k, x_k) \prod\limits_{k \in \Omega_d^2} \overline{G}_k^p(x_k), \ i \in \Omega_d^1, \ u_i = 0, \\ \rho \prod\limits_{k \in \Omega_d^0} v_k^{(0)}(u_k, x_k) \prod\limits_{k \in \Omega_d^1} v_k^{(1)}(u_k, x_k) \prod\limits_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \neq i}} \overline{G}_k^p(x_k), \ i \in \Omega_d^1, \quad i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(2 + H_i^{(0)}(\tau_i) + H_i^{(1)}(\tau_i)\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \left(\tau_k + M\beta_k^p\right) \right]^{-1}.$$

Здесь $v_k^{(1)}(u_k, x_k) = f(u_k + x_k) + \int\limits_0^{u_k} f(u_k + x_k - s) h_k^{(1)}(s) ds$,

$v_k^{(0)}(u_k, x_k) = \int\limits_0^{u_k} g(u_k + x_k - s) h_k^{(0)}(s) ds$ – соответственно плотности остаточной наработки и остаточного времени восстановления;

$v_k^{(1)}(0,0)=1$; $H_k^{(1)}(\tau_k)$, $H_k^{(0)}(\tau_k)$ – соответственно среднее число 1-восстановлений и 0-восстановлений альтернирующего процесса восстановления, Ω_d^0, Ω_d^1 - совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных соответственно 0 и 1.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично подобному утверждению в [4].

Перейдем к нахождению стационарных характеристик системы. Разобьем фазовое пространство E состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+ и E_-; E_+ - подмножество работоспособных состояний, E_- - подмножество отказовых состояний:

$$E_+=\left\{\overline{i\overline{d}x}^{(i)}\overline{u},\ \overline{d}\in D_+,\ \ i=\overline{1,N}\right\},\ E_-=\left\{\overline{i\overline{d}x}^{(i)}\overline{u},\ \overline{d}\in D_-,\ \ i=\overline{1,N}\right\}.$$

Здесь $D_+\left(D_-\right)$– множество векторов $\overline{d}$, компоненты которых равны кодам «физических» состояний элементов системы, находящейся в подмножестве работоспособных (отказовых) состояний $E_+\left(E_-\right)$.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u системы найдем по формулам [2,3].

$$\mathrm{T}_+=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}_+}m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_+}\rho(dz)P(z,\mathrm{E}_-)},\quad \mathrm{T}_-=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}_-}m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_-}\rho(dz)P(z,\mathrm{E}_+)},\quad K_u=\frac{T_+}{T_++T_-},\tag{2}$$

где $\rho(\cdot)$ - стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,n\geq 0\}$, $m(z)$ - средние времена пребывания в состояниях системы, $P(z,\mathrm{E}_+)$ $\left(P(z,E_-)\right)$- вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n,n\geq 0\}$ из отказовых (работоспособных) состояний в работоспособные (отказовые).

С учетом вида стационарного распределения ВЦМ (1) формулы (2) преобразуются к виду

$$T_+=\frac{\sum\limits_{d\in D_+}\prod\limits_{k\in\Omega_d^1}\left(\tau_k-\int\limits_0^{\tau_k}\left(H_k^{(0)}(t)-H_k^{(1)}(t)\right)dt\right)\prod\limits_{k\in\Omega_d^0}\int\limits_0^{\tau_k}\left(H_k^{(0)}(t)-H_k^{(1)}(t)\right)dt\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}M\beta_k^p}{\sum\limits_{d\in D_+'}\sum\limits_{j\in G(d)}\left(1+H_j^{(1)}(\tau_j)\right)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\neq j}}\left(\tau_k-\int\limits_0^{\tau_k}\left(H_k^{(0)}(t)-H_k^{(1)}(t)\right)dt\right)\prod\limits_{k\in\Omega_d^0}\int\limits_0^{\tau_k}\left(H_k^{(0)}(t)-H_k^{(1)}(t)\right)dt\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}M\beta_k^p},$$

$$T_- = \left[\sum_{d \in D_-} \prod_{k \in \Omega_d^1} \left(\tau_k - \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \right) \prod_{k \in \Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \right] /$$

$$/ \{ \sum_{d \in D'_-} \left[\sum_{j \in I_0(d)} H_j^{(1)}(\tau_j) \prod_{k \in \Omega_d^1} \left(\tau_k - \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \right) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^0 \\ k \neq j}} \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \in I_2(d)} \prod_{k \in \Omega_d^1} \left(\tau_k - \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \right) \prod_{k \in \Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \prod_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \neq j}} M\beta_k^p \ \right] \}$$

$$K_u(\tau_1, ..., \tau_N) = \frac{\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^1} \left(\tau_k - \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \right) \prod_{k \in \Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(H_k^{(0)}(t) - H_k^{(1)}(t) \right) dt \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p}{\prod_{k=1}^{N} \left(\tau_k + M\beta_k^p \right)}. \quad (3)$$

Здесь D'_+ – множество пограничных работоспособных «физических» состояний системы, т.е. множество векторов $\overline{d} \in D_+$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 1 на 0 или 2 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_-; $G(d)$ – множество номеров компонент вектора $\overline{d} \in D'_+$, изменение значения каждой из которых с 1 на 0 или 2 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_-. D'_- – множество пограничных отказовых состояний системы, т.е. множество векторов $\overline{d} \in D_-$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 0 или 2 на 1 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_+; $I_0(d)\left(I_2(d)\right)$ – множество номеров компонент вектора $\overline{d} \in D'_-$, изменение значения каждой из которых с 0 (2) на 1 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_+.

Выразим стационарные характеристики $T_+, T_-, K_u(\tau_1, ..., \tau_N)$ системы через КТИ $K_i(\tau_i)$ элементов, которые определяются формулами [1]:

$$K_i(\tau_i) = \frac{\tau_i - \int_0^{\tau_i} \left(H_i^{(0)}(t) - H_i^{(1)}(t) \right) dt}{\tau_i + M\beta_i^p}, \ i = \overline{1, N}.$$

Обозначим через $M_1, ..., M_\omega$ – все различные множества элементов путей системы [1]. Обратим внимание, что по определению, элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в нерабочем состоянии, т.е. в состояниях 0 или 2. $M'_i,\ i = \overline{1, \omega'}$ -

множества элементов пограничных путей; $G(M_i'),\ i=\overline{1,\omega'}$ - множество элементов пограничного пути M_i', соответствующих номерам тех элементов, переход которых из работоспособного состояния в отказовое, приводит к отказу всей системы. $\Phi_i,\ i=\overline{1,s}$ - множества элементов сечений; $\Phi_i',\ i=\overline{1,s'}$ - множества элементов пограничных сечений; $I(\Phi_i'),\ i=\overline{1,s'}$ - множество элементов пограничного сечения Φ_i', соответствующих номерам тех элементов, переход которых из отказового состояния в работоспособное, приводит к восстановлению работоспособности всей системы.

Формула (3) с помощью преобразования сумм произведений средних после несложных преобразований приводится к виду

$$T_+ = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\omega}\prod\limits_{n\in M_i}K_n(\tau_n)\prod\limits_{n\notin M_i}^{N}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\omega'}\sum\limits_{j\in G(M_i')}\dfrac{\left(1+H_j^{(1)}(\tau_j)\right)\prod\limits_{n\in M_i'}K_n(\tau_n)\prod\limits_{n\notin M_i'}^{N}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}{\tau_j-\int\limits_0^{\tau_j}\left(H_j^{(0)}(t)-H_j^{(1)}(t)\right)dt}},$$

$$T_- = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\prod\limits_{n\notin \Phi_i}^{N}K_n(\tau_n)\prod\limits_{n\in \Phi_i}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{s'}\sum\limits_{j\in I(\Phi_i')}\dfrac{\left(1+H_j^{(0)}(\tau_j)\right)\prod\limits_{n\notin \Phi_i'}^{N}K_n(\tau_n)\prod\limits_{n\in \Phi_i'}\left(1-K_n(\tau_n)\right)}{\int\limits_0^{\tau_j}\left(H_j^{(0)}(t)-H_j^{(1)}(t)\right)dt+M\beta_j^p}},$$

$$K_u\left(\tau_1,...,\tau_N\right)=\sum_{i=1}^{\omega}\prod_{n\in M_i}K_n(\tau_n)\prod_{n\notin M_i}^{N}\left(1-K_n(\tau_n)\right)=\varphi\left(K_1(\tau_1),...,K_N(\tau_N)\right) \quad . \qquad (4)$$

Здесь структурная функция системы $\varphi(z_1,...,z_n)$ задана в дизъюнктивной нормальной форме, однако ее можно представить многими эквивалентными способами, например, в линейной форме [1,5].

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящегося на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau_1,...,\tau_N)$, приходящихся на единицу времени исправного функционирования системы, используем формулы [6]

$$S = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z) f_s(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)\rho(dz)}, \qquad C = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z) f_c(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)}, \tag{5}$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ с учетом обозначений, введенных в постановочной части статьи, имеют вид:

$$f_s(z) = \begin{cases} -\sum\limits_{k\in\Omega_d^0} c_k - \sum\limits_{k\in\Omega_d^2} c_k^p, \; z \in \left\{ \overline{id}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u} \right\}, \; i = \overline{1,N}, \quad \text{если } \Omega_d^1 = \varnothing, \\ \sum\limits_{k\in\Omega_d^1} c_k^0 - \sum\limits_{k\in\Omega_d^0} c_k - \sum\limits_{k\in\Omega_d^2} c_k^p, \; z \in \left\{ \overline{id}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u} \right\}, \; i = \overline{1,N}, \quad \text{если } \Omega_d^1 \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$f_c(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in\Omega_d^0} c_k + \sum\limits_{k\in\Omega_d^2} c_k^p, \quad z \in \left\{ \overline{id}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u} \right\}, \; i = \overline{1,N}, \quad \text{если } \Omega_d^0 \bigcup \Omega_d^2 \neq \varnothing, \\ 0, \quad z \in \left\{ \overline{id}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u} \right\}, \; i = \overline{1,N}, \quad \text{если } \Omega_d^0 \bigcup \Omega_d^2 = \varnothing. \end{cases}$$

После преобразований формулы **(5)** приводятся к виду

$$S(\tau_1,\dots,\tau_N) = \sum_{i=1}^{N} S_i(\tau_i), \tag{6}$$

$$C(\tau_1,\dots,\tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i(\tau_i) K_i(\tau_i)}{K_u(\tau_1,\dots,\tau_N)}, \tag{7}$$

где $S_i(\tau_i) = \dfrac{c_i^0 \tau_i - \left(c_i^0 + c_i\right) \int\limits_0^{\tau_i} \left(H_i^{(0)}(t) - H_i^{(1)}(t) \right) dt - c_i^p M\beta_i^p}{\tau_i + M\beta_i^p}$ - средний удельный доход i-го элемента, приходящийся на единицу календарного времени, а $C_i(\tau_i) = \dfrac{c_i^p M\beta_i^p + c_i \int\limits_0^{\tau_i} \left(H_i^{(0)}(t) - H_i^{(1)}(t) \right) dt}{\tau_i - \int\limits_0^{\tau_i} \left(H_i^{(0)}(t) - H_i^{(1)}(t) \right) dt}$ - средние удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования i-го элемента.

Оптимизация сроков проведения то элементов. Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций **(4)**, **(6)** и **(7)**. Заметим, что для достижения максимальных значений КТИ $K_u(\tau_1,\dots,\tau_N)$ и среднего удельного дохода $S(\tau_1,\dots,\tau_N)$ системы необходимо и достаточно оптимизировать величину наработки каждого элемента системы для проведения его ТО, что нельзя утверждать относительно минимальных средних удельных затрат $C(\tau_1,...,\tau_N)$ системы.

Приравнивая нулю частные производные функций $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$, $S(\tau_1,...,\tau_N)$ и $C(\tau_1,...,\tau_N)$, получаем соответственно системы уравнений (8) – (10) для определения оптимальных значений наработок τ_i^k, τ_i^s, τ_i^c, $i=\overline{1,N}$.

$$\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(H_i^{(0)}(\tau_i)-H_i^{(1)}(\tau_i)\right)-\int_0^{\tau_i}\left(H_i^{(0)}(t)-H_i^{(1)}(t)\right)dt=M\beta_i^p,\quad i=\overline{1,N}, \tag{8}$$

$$\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(H_i^{(0)}(\tau_i)-H_i^{(1)}(\tau_i)\right)-\int_0^{\tau_i}\left(H_i^{(0)}(t)-H_i^{(1)}(t)\right)dt=\frac{(c_i^p+c_i^0)M\beta_i^p}{(c_i+c_i^0)},\quad i=\overline{1,N} \tag{9}$$

$$c_i\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(H_i^{(0)}(\tau_i)-H_i^{(1)}(\tau_i)\right)-c_i\int_0^{\tau_i}\left(H_i^{(0)}(t)-H_i^{(1)}(t)\right)dt-\frac{\partial}{\partial K_i}\ln\varphi\left(K_1(\tau_1),...,K_N(\tau_N)\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{N}C_j(\tau_j)K_j(\tau_j)\right]\cdot\left[M\beta_i^p-\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(H_i^{(0)}(\tau_i)-H_i^{(1)}(\tau_i)\right)+\int_0^{\tau_i}\left(H_i^{(0)}(t)-H_i^{(1)}(t)\right)dt\right]=$$

$$=c_i^pM\beta_i^p,\quad i=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Достаточными условиями существования конечных решений систем уравнений (8)-(10) является выполнение соответственно неравенств

$$\frac{M\alpha_i D\beta_i-M\beta_iD\alpha_i}{M\alpha_i+M\beta_i}>M\alpha_i\left(2M\beta_i^p-M\beta_i\right),\quad i=\overline{1,N},$$

$$\frac{M\alpha_i D\beta_i-M\beta_iD\alpha_i}{M\alpha_i+M\beta_i}>\frac{2(c_i^p+c_i^0)}{c_i+c_i^0}M\beta_i^p\left(M\alpha_i+M\beta\right)-M\beta_i\left(2M\beta_i^p+M\alpha_i\right),\quad i=\overline{1,N}$$

$$c_i\left(M\alpha_iM\beta_i+\frac{M\alpha_i D\beta_i-M\beta_iD\alpha_i}{M\alpha_i+M\beta_i}\right)-\frac{\partial}{\partial K_i}\ln\varphi\left(\frac{M\alpha_1}{M\alpha_1+M\beta_1},...,\frac{M\alpha_N}{M\alpha_N+M\beta_N}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}\frac{c_jM\beta_j}{M\alpha_j+M\beta_j}\left[M\alpha_i\left(2M\beta_i^p-M\beta_i\right)-\frac{M\alpha_i D\beta_i-M\beta_iD\alpha_i}{M\alpha_i+M\beta_i}\right]>$$

$$>2M\beta_i^p\left(c_i^pM\alpha_i+\left(c_i^p-c_i\right)M\beta_i\right),\quad i=\overline{1,N}.$$

В случае существования единственных решений систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами

$$K_{u\max}=\varphi\left(K_1(\tau_1^k),...,K_N(\tau_N^k)\right),\qquad K_i(\tau_i^k)=1-H_i^{(0)}(\tau_i^k)+H_i^{(1)}(\tau_i^k),\qquad S_{\max}=\sum_{i=1}^{N}S_i(\tau_i^s),$$

$$S_i(\tau_i^s)=c_i^0+\left(c_i^0+c_i\right)\left(H_i^{(1)}(\tau_i^s)-H_i^{(1)}(\tau_i^s)\right), \tag{11}$$

 ISSN 1562-9945

$$C_{\min} = \frac{\sum_{i=1}^{N} C_i\left(\tau_i^c\right) K_i\left(\tau_i^c\right)}{K_u\left(\tau_1^c,...,\tau_N^c\right)}, \tag{12}$$

Если системы уравнений имеют несколько решений, то оптимальные значения показателей качества находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них. Отсутствие корней какого-либо $j-$ го уравнения систем (8), (9) означает, что функция $K_j(\tau_j)\left(S_j(\tau_j)\right)$ является монотонной и ее экстремум достигается при $\tau_i \to \infty$. В этом случае в формулах (11) следует полагать $K_i(\infty) = \frac{M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$, $S_i(\infty) = \frac{c_i^0 M\alpha_i - c_i M\beta_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$.

Если система уравнений (10) не имеет решений, то следует исследовать на минимум всевозможные функции, которые получаются из (7) в результате замен $K_i(\infty) = \frac{M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$, $C_i(\infty) = \frac{c_i M\beta_i}{M\alpha_i}$. Достижение экстремума при $\tau_i \to \infty$ говорит о том, что проводить предупредительное ТО $i-$го элемента нецелесообразно, поскольку его проведение ухудшает показатель качества функционирования системы.

В заключение приведем пример применения полученных результатов. Рассмотрим систему из трех элементов (см. рисунок 1). Наработка на отказ и времена аварийного восстановления элементов распределены по закону Эрланга третьего порядка соответственно с плотностями: $f_i(t) = \frac{\lambda_i^3 t^2 e^{-\lambda_i t}}{2}$, $i = \overline{1,3}$, $g_i(t) = \frac{\mu_i^3 t^2 e^{-\mu_i t}}{2}$, $i = \overline{1,3}$.

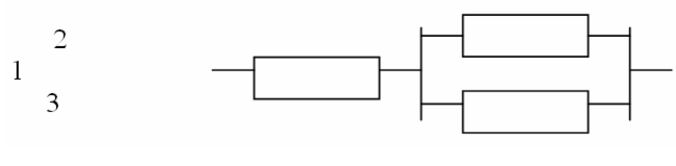

Рисунок 1 - Пример системы с монотонной структурой

Таблица 1

Исходные данные системы

№	λ_i	μ_i	Мα_i, ч	$M\beta_i$, ч	$M\beta_i^p$, ч	c_i^0, у.е./ч	c_i, у.е./ч	c_i^p, у.е./ч
1	0,05	1	60	3	0,5	5	1	0,2
2	0,1	0,3	30	10	3	7	3	2
3	008	0,3	37,5	10	2	9	3	1

Таблица 2

Результаты расчетов

<table>
<tr><th>№</th><th>τ_i^k, ч</th><th>$K_и^{\max}$</th><th>$K_и^{\infty}$</th><th>τ_i^s, ч</th><th>$S^{\max}$</th><th>S^{∞}</th><th>τ_i^c, ч</th><th>$C^{\max}$</th><th>C^{∞}</th></tr>
<tr><td>1</td><td>25,699</td><td rowspan="3">0,939</td><td rowspan="3">0,902</td><td>23,618</td><td rowspan="3">17,424</td><td rowspan="3">14,483</td><td>18,293</td><td rowspan="3">0,718</td><td rowspan="3">1,584</td></tr>
<tr><td>2</td><td>18,865</td><td>17,717</td><td>15,289</td></tr>
<tr><td>3</td><td>29,017</td><td>17,420</td><td>12,432</td></tr>
</table>

Здесь через $K_и^{\infty}$, S^{∞}, C^{∞} обозначены показатели качества функционирования системы в случае не проведения ТО элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
2. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
3. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин – Кишинев: Штиинца, 1991. – 209 с.
4. Песчанский А.И. Оптимизация технического обслуживания по наработке каждого элемента с последовательной структурой // Кибернетика и системный анализ.- 2006. – № 6. – С. 126-135.
5. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. –СПб.:БХВ-Петербург, 2006. - 704 с.
6. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Одержано 17.12.2008р.