УДК 62-50: 517.926.4

В.М. Григорьев

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕРМИНАХ ВХОД-ВЫХОД ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Постановка задачи. Цель работы состоит в получении достаточных условий для коэффициентов линейного нестационарного дифференциального уравнения, обеспечивающих экспоненциальное убывание решений при произвольной экспоненциально убывающей правой части.

Обоснование полученных результатов. Характеристический показатель Ляпунова (в дальнейшем просто показатель) функции x(t) из пространства X бесконечно дифференцируемых функций времени $t \geq 0$ определяется как верхний предел [1, 2]

$$\chi(\mathrm{x}) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t}, \; \chi(0) = -\infty.$$

Функция x(t) имеет строгий показатель, если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}.$$

Для числа $\alpha < 0$ определим множество

$$M_\alpha = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} | \chi(\mathrm{x}^{(\mathrm{i})}) < \alpha, \; \mathrm{i} = 0, 1, 2 \ldots\}$$

Заметим, что $\forall m \in M_\alpha \; \overline{\lim_{t\to\infty}} \; \mathrm{m(t)} = 0$.

Любая функция m(t) из M_α, будет ограниченной. Более того, согласно [1, 2] , имеем

$$\forall \varepsilon \, \exists \mathrm{C} > 0 \; |\mathrm{m(t)}| \leq \mathrm{C} \, e^{(\alpha+\varepsilon)t}. \tag{1}$$

Элементы множества M_α экспоненциально убывают. Следовательно, эти множества можно назвать пространствами устойчивых сигналов со степенью устойчивости α [3].

Рассмотрим произвольное поле Q действительных функций со строгим нулевым показателем, замкнутое относительно дифференцирования. Примером такого поля является множество дробно рациональных функций. Выделим в поле Q подкольцо Q_T, состоящее из функций, не имеющих полюсов при $0 \le t < \infty$(полюса в бесконечности допустимы). Рассмотрим кольцо линейных дифференциальных операторов R с коэффициентами в кольце Q_T.

Введём множество дифференциальных операторов

$$S(\mathcal{M}_\alpha) = \{s \in R \,|\, \forall x \in X \ \forall u \in \mathcal{M}_\alpha \ (sx=u) \Rightarrow x \in \mathcal{M}_\alpha\} \qquad (2)$$

Если в линейном нестационарном дифференциальном уравнении, представленном в операторной форме sx=u, оператор s лежит в множестве $S(\mathcal{M}_\alpha)$, то это означает, что все решения этого уравнения вместе со всеми своими производными будут иметь показатели Ляпунова меньшие, чем α при любой правой части, имеющей вместе со всеми своими производными показатели Ляпунова меньшие, чем α. Назовём такое свойство уравнения устойчивостью в терминах вход/выход со степенью α [3].

Изучим условие принадлежности операторов из R множеству $S(\mathcal{M}_\alpha)$. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из первого метода Ляпунова [1, 2].

Характеристическим показателем Ляпунова матричной или векторной функции Y(t) называется максимальный среди показателей его элементов. Причём $\chi(Y(t)) = \chi(\|Y(t)\|)$, где $\|.\|$ - произвольная норма матрицы (вектора). Рассмотрим линейную дифференциальную систему размерности n

$$y'(t) = F(t)y(t), \ t \ge 0, \qquad (3)$$

где элементы матрицы F(t) непрерывны и ограничены при $t \ge 0$. Каждое нетривиальное решение системы (3) имеет конечный показатель. Множество $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_m$ показателей решений называется спектром системы. Число m элементов в спектре не превышает размерности системы n. Если в (3) $F(t) = F_1 + F_2(t)$, где F_1 – постоянная матрица и $\lim\limits_{t \to \infty} F_2(t) = 0^{n x n}$, то спектр систем (3) и $y'(t) = F_1 y(t)$, совпадают [2, с. 83]. Пусть фундаментальная система Y(t) решений системы (3) содержит n_s решений с показателем α_s, s=1, 2...m. Рассмотрим величину $\sigma_Y = \sum_{s=1}^{m} n_s \alpha_s$, где $\sum_{s=1}^{m} n_s = n$. Существуют фундаментальные системы с наименьшим значением σ величины σ_Y. Такие фундаментальные системы называются нормальными. Причем для любой фундаментальной системы Y(t) найдётся такая действительная матрица C , что CY(t) будет нормальной системой.

Если $\sigma = \underset{t \to \infty}{\lim} \frac{1}{t} \int_0^t Tr(F(\tau))d\tau$, где lim - нижний предел, Tr() - след матрицы, то система называется правильной по Ляпунову.

Теорема Перрона гласит, что система (3) правильна по Ляпунову тогда и только тогда, когда для её спектра (α_1 , α_2, ... α_n) с учётом кратности показателей, и спектра (β_1, β_2 ... β_n) сопряжённой системы $y'(t) = -F(t)^T y(t)$, $t \geq 0$, выполнено соотношение

$$\alpha_i + \beta_i = 0,\ i=1,\ 2\ \ldots\ n. \qquad (4)$$

Пусть Y(t) - произвольная фундаментальная система решений уравнения (3) и K(t, τ) - матрица Коши. Если система (3) правильна по Ляпунову, то имеет место неравенство [с. 238]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \|K(t, \tau)\| \leq C\, e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)+2\varepsilon\tau},\ t \geq \tau \geq 0, \qquad (5)$$

где α - максимальный элемент спектра системы (3). Используя приведенные сведения, докажем теорему.

Теорема. Если в операторе $S = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)p^{(i)}$, $a_n = 1$, p=d/dt коэффициенты $a_i(t) \in Q_T$, i=0, 1 ... n-1 имеют пределы s_i и максимальная действительная часть корней стационарного многочлена $\sum_{i=0}^{n} s_i p^{(i)}$, $s_n = 1$ меньше, чем α, то S лежит в $S(M_\alpha)$.

Рассмотрим в пространстве **X** бесконечно дифференцируемых за исключением конечного числа точек функций времени $t \geq 0$ дифференциальное уравнение Sx(t)=u(t), $\forall u(t) \in M_\alpha$ и представим его в виде

$$(p^n + (s_{n-1} + q_i(t))\, p^{n-1} + (s_0 + q_0(t))\, x(t) = u(t)\ ,$$

где функции $q_i(t) \in Q_T$, i=0, 1 ... n-1 имеют строгий нулевой предел при $t \to \infty$.

Запишем последнее уравнение в пространстве состояний

$$y'(t) = F(t)\, y(t) + Gu(t) \qquad (6)$$

$$x(t) = Hy(t),$$

где $y(t) = |\ x(t)\ x'(t)\ \dots\ \ x^{(n-1)}(t)|^T$,

$G^T = |0\ 0\ \dots\ 1|$, $H = |1\ 0\ \dots\ 0|$, $F(t) = F_1 + F_2(t)$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 \\ s_0 & s_1 & & s_{n-1} \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 0 \\ q_0 & q_1 & & q_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Так как $\lim\limits_{t \to \infty} F_2(t) = 0^{nxn}$, то системы

$$y'(t) = F(t)\, y(t) \tag{7}$$

и

$$y'(t) = F_1 y(t) \tag{8}$$

имеют одинаковый спектр (α_1, α_2, ... α_n) с учётом кратности показателей.

Поскольку $\lim\limits_{t \to \infty} (-F_2{}^T(t)) = 0^{nxn}$, то спектр сопряжённой к (7) системы $y'(t) = -F(t)^T y(t)$, совпадает со спектром (β_1, β_2 ... β_n) стационарной системы $y'(t) = -F_1{}^T y(t)$. Так как F_1 - постоянная матрица, то имеет место соотношение (4) и согласно теореме Перрона система (7) будет правильной по Ляпунову.

Система (8) соответствует линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами $(p^n + s_{n-1}p^{n-1} + \dots + s_0)\, x(t) = 0$. По условию теоремы максимальный показатель Ляпунова этой системы меньше, чем α. Обозначим этот максимальный показатель как $\gamma (\gamma < \alpha)$. Показатель произвольной фундаментальной системы решений $Y(t)$ системы (7) также равен γ. Так как система (7) правильна по Ляпунову, то для её матрицы Коши имеет место неравенство (5)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C_1 > 0\ \|K(t, \tau)\| \le C_1\, e^{(\gamma+\varepsilon)(t-\tau)+2\varepsilon\tau},\ t \ge \tau \ge 0, \tag{9}$$

Пусть показатель $u(t)$ равен δ, тогда, согласно (1)

$$\forall \varepsilon\ \exists C_2 > 0\ |u(t)| \le C_2\, e^{(\delta+\varepsilon)t},\ t > 0. \tag{10}$$

Произвольное решение уравнения (6) имеет вид $x(t) = Hy(t)$ где

$$y(t) = Y(t)y(0) + \int_0^t K((t, \tau)Gu(t)d\tau = z_0(t) + z_u(t)$$

 ISSN 1562-9945

для некоторого начального условия y(0). Так как показатель γ фундаментальной системы Y(t) меньше чем α, то $z_0(t)$ лежит в пространстве M_α. Рассмотрим второе слагаемое. Учитывая (9) и (10), имеем

$$\|z_u(t)\| \leq C_1C_2 e^{(\gamma+\varepsilon)t} \int_0^t e^{(-\gamma+2\varepsilon+\delta)\tau} d\tau = \frac{C_1 \ C_2}{-\gamma+2\varepsilon+\delta} e^{(\gamma+\varepsilon)t} (e^{(-\gamma+2\varepsilon+\delta)t} - 1) =$$
$$\frac{C_1 \ C_2}{-\gamma+2\varepsilon+\delta} (e^{(3\varepsilon+\delta)t} - e^{(\gamma+\varepsilon)t}).$$

Так как $\gamma < \alpha$ и $\delta < \alpha$, то в силу произвольности ε всегда можно добиться, чтобы $-\gamma+2\varepsilon+\delta \neq 0$ и $\max(3\varepsilon+\delta, \gamma+\varepsilon) < \alpha$. Тогда показатель $\|z_u(t)\| < \alpha$ и, следовательно, показатели решений системы (6) будут меньше, чем α.

Дифференцирую систему (6) и, учитывая, что коэффициенты имеют строгий нулевой показатель, получаем, что и все производные решения будут меньше, чем α и, следовательно, принадлежат пространству M_α. Учитывая определение множества S(M_α), завершаем доказательство теоремы.

Выводы. Доказано, что если коэффициенты линейного нестационарного дифференциального уравнения стремятся к устойчивому с некоторой степенью стационарному уравнению, то нестационарное уравнение будет устойчиво с той же степенью в терминах вход/выход. Доказательство базируется на первом методе Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. 472 с.

2. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости. / Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. - М.: Наука, 1966. 576 с.

3. Григорьев В.М. Устойчивость линейных систем в операторной форме // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (55). - Днепропетровск, 2008. - С. 104–112.

Получено 15.12.2008г.