УДК 681.51

О. А. Машков, Л. М. Усаченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ БОЛЬШИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Введение.

Проблеме синтеза оптимального управления большими системами, состояние которых описывается нелинейными моделями, уделяется огромное значение. Объясняется это тем, что линейные модели описывают не сами процессы в сложных динамических системах, а отклонение от заданного опорного состояния системы [1]. Оно обусловлено, в основном, внешними возмущающими воздействиями на систему, ненулевыми начальными условиями её состояния и вариационными приращениями управляющих воздействий [2]. Однако, для современных сложных систем, которые представляют собой распределённые, многомерные, многосвязные, иерархические структуры, подход с использованием линейных моделей будет носить частный исследовательский характер. Это не позволит описать сложные процессы в таких системах, а тем более организовать управление их состоянием в критических и хаотических режимах [3].

Основная часть.

Решения указанной проблемы предполагает использование новых принципов и методов синергетической теории управления [3]. Она предполагает использование принципов самоорганизации сложных динамических структур при синтезе систем управления ими [4].

Для развития синергетической концепции управления нелинейными распределёнными иерархическими многомерными и многосвязными динамическими системами предложим новый подход синтеза управления такими объектами в форме соответствующих им обратных связей.

Состояние сложной динамической системы представим в виде нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_n = f_n(x_n) + G_n(x_n)u,\ x_n(t_0) = x_{n0}, \tag{1}$$

где $x_n - n$ - мерный вектор динамического состояния системы;

$f_n(x_n)$ - вектор нелинейных функций, входящих в модель системы;

 ISSN 1562-9945

$G_n(x_n)$ - матрица размерности $n \times r$;

u - вектор управляющих параметров системы;

x_{n0} - значение вектора x_n в начальный момент времени $t = t_0$.

Состояние, в которое предполагается перевести объект, в общем виде зададим ненулевым вектором $x_n(t_k) = x_k$, первой производной этого вектора по времени $\dot{x}_n(t_k) = \dot{x}_k$ и вектором управлений $u(t_k) = u_k$.

Для удобства представления синтезируемого алгоритма определения управлений вводим в рассмотрение вектор $x = x_n - x_k$. Тогда нелинейную модель сложного динамического объекта (1) представим в виде

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,\ x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $f(x) = f_n(x + x_k) - f_n(x_k) - G_n(x_k)u_k$ - n-мерный вектор нелинейных функций, адекватно описывающих реальные процессы в системе;

$G(x) = G_n(x + x_k)$ - матрица размерности $(n \times r)$.

Главная особенность модели (2) состоит в том, что когда в точке фазового пространства, где $x = 0$ вектор $f(x) = 0$, и, следовательно, при управлении $u = 0$ также и первая производная вектора состояния $\dot{x} = 0$.

При этом алгоритм синтеза управлений динамическим состоянием объекта значительно упрощается при наложении соответствующих дополнительных требований к структуре его модели (2). Для этого введём ряд допущений. Во-первых, полагаем, что управление u - скалярное, размерность $r = 1$ и матрица $G(x)$ представлена вектором - столбцом. Во-вторых, первый элемент вектора нелинейной функции $f(x)$ тождественно равен нулю.

Тогда вектор-столбец определим из выражения вида $G(x) = gE_1$, где E_1 - первый столбец единичной матрицы E, а g - константа. Очевидно, что для самого общего случая реализация принятых нами допущений, как правило, может обеспечиваться путём деления многомерной многоканальной нелинейной модели сложного объекта на составные части. При этом каждая из этих частей содержит одно управляющее воздействие. Кроме этого, как показывают результаты аналитических исследований, в состав этих частей целесообразно включать уравнение интегрирующих звеньев. Такой подход наиболее полно описывает динамику возможных переходных процессов при самоорганизационной реализации управляющих воздействий.

Отметим, что первый элемент вектора x представляет одновременно фактическое управляющее воздействие объекта и выходной сигнал сервопривода, а управление u является входным сигналом интегрирующего звена. Перекрёстные связи между составными частями модели объекта при синтезе управлений могут сохраняться. Для удобства моделирования будем считать их постоянными.

Реализация синергетического управления по аналогии с подходом, описанным в [3], предполагает в случае использования модели (2) задавать критерий качества управления в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (Q_x + Ru^2)dt, \tag{3}$$

где $Q_x = x^T Bx$ - квадратичная форма с положительно определённой матрицей B;

R - матрица коэффициентов управления состоянием динамической системы.

Искомое управление определяется из выражения

$$u_{on} = -\frac{1}{2} R^{-1} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \tag{4}$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T$ - вектор-столбец, вычисляемый из нелинейного уравнения (2) в частных производных из зависимости вида

$$f(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) G(x) R^{-1} G^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = -Q_x . \tag{5}$$

При произвольном текущем значении вектора x, соответствующих ему векторах $f(x)$ и $G(x)$, постоянной матрице B и коэффициенте R, управление u может вычисляться с использованием, например, известных методов характеристик или инвариантного погружения. Однако при этом необходимо интегрировать на интервале оптимизации в прямом и обратном времени системы уравнений довольно высокого порядка. Это связано с тем, что реальные объекты, описываемые нелинейными моделями вида (2), представляют собой распределённые, многомерные, многосвязные, иерархические структуры. Аналитические исследования показывают, что указанные методы при использовании модели (2) дают лишь приближенное решение. Для обеспечения точности при организации управления сложными объектами в большинстве случаев это неприемлемо.

Устранения этой проблемы возможно за счет применения итеративного алгоритма прямого решения уравнения (5), Он не требует значительных вычислительных затрат на численное интегрирование уравнений вида (1) и соответствующих ему сопряженных уравнений (2) – (5).

Анализ структуры уравнений (4) и (5) предполагает следующие преобразований выражения (4). Вычтем из его левой и правой частей выражение вида $\frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)R^{-1}G^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$.

Тогда получаем уравнение вида

$$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)R^{-1}G^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T=-Q_x-\frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x}G(x)R^{-1}G^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T.$$

Эта зависимость с учётом (4) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x)+G(x)u_{on}\right]=-Q_x-Ru_{on}^2. \tag{6}$$

Итеративный алгоритм решения, объединяющий соотношения (4) и (6), представим системой двух уравнений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}\left[f(x)+G(x)u_{(i)}\right]=-Q_x-Ru^2{}_{(i)}, \tag{7}$$

$$u_{(i+1)}=-\frac{1}{2}R^{-1}G^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T_{(i+1)}. \tag{8}$$

В уравнениях (7) и (8) индексом «i» обозначены данные, полученные на предыдущем шаге, а индексом «$i+1$» - данные, подлежащие определению на текущем шаге итеративных вычислений.

Используя этот алгоритм, предварительно задается величина $u=u_{(1)}$ (при $i=1$) и решается, в отличие от уравнения (5), уравнение в частных производных (7) относительно вектора $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}$. Далее, в соответствии с выражением (8) определяется $(i+1)$ -е приближенное значение управляющего воздействия u, вносится изменение в правую и левую части уравнения (7), и цикл решения снова повторяется.

Поясним математический смысл предложенного итеративного алгоритма. В данной точке фазового пространства, содержащего вектор x, производная вектора $\dot{x} = \dot{x}_{(i)}$, соответствующий вектору $f(x)$ и управлению $u = u_{(i)}$, и правая часть уравнения (7), а именно величина, вычисляемая как $Q_x + Ru_{(i)}^2$, порождают в пространстве состояний объекта инвариантную поверхность $V_{(i+1)} = const$.

Описанная поверхность соответствующим образом ориентирована относительно вектора $\dot{x}_{(i)}$. В случае, когда эта ориентация оптимальная, функция $V_{(i+1)}$ обусловливает управление $u_{(i+1)} = u_{(i)}$ и, соответственно, вектор состояния системы $x_{(i)} = \dot{x}_{(i+1)}$.

Продолжение цикла решения не нарушает взаимную ориентацию векторов $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i)}^T$ и $\dot{x}_{(i)}$. В противном случае производится обновление результатов вычисления управления из выражения (8), правой части (7), и результатов решения (7). Если этот итеративный процесс сходящийся, то при стремлении значения $i \to \infty$ решения уравнений (5) и (7) совпадают.

Для использования рассмотренного подхода предложим доступную для реализации методику решения уравнения (7) и определения пределов изменения управлений $u_{(i)}$ в итеративном процессе. Отметим, что на i- м шаге управления $u_{(i)}$, величины Q_x и R, а также векторы $f(x)$ и $G(x)$ считаются известными. Корреляция искомых элементов вектора $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}$ с известными данными задачи устанавливается уравнением (7). Для задания однозначности решения в такой ситуации введем дополнительные условия на ориентацию поверхности $V_{(i+1)} = const$ относительно вектора $\dot{x}_{(i)}$. Зададим также требования, чтобы векторы $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}$ и $f_{x(i)} = \dot{x}_{(i)} = f(x) + G(x)u_{(i)}$, были коллинеарные. Наряду с этим поверхность уровня $V_{(i+1)}$ в точке x должна быть ортогональна вектору $f_{x(i)}$. Так как значение функции V в точ-

 ISSN 1562-9945

ке x фазового пространства состояния объекта и оценка оптимальности управления (3) при оптимальном нелинейном управлении совпадают, то вводимые условия соответствуют самому быстрому убыванию значения оценки (3) при переходе из точки текущего состояния x в начало фазового пространства.

Требования выбора вектора $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}$ по условиям коллинеарности с вектором $f_{x(i)}$ соответствует цели оптимального нелинейного управления.

Однако, как показывают исследование, это требование приводит к существенному усложнению алгоритма решения. Предлагается дополнительно ввести в рассмотрение невырожденную постоянную матрицу K вида

$$K = \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_n \\ 0 & K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_1 \end{vmatrix}$$

и вектор $f_{y(i)} = Kf_{x(i)}$. Далее определяем вектор $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)}$ по условию ортогональности вектора $f_{y(i)}$ к поверхности $V_{(i+1)}$ в точке x фазового пространства состояния нелинейного объекта. В случае, когда коэффициенты $K = 1$ и $K_i = 0, \left(i = \overline{1,n}\right)$, матрицы $K = E$, вектор $f_{y(i)} = f_{x(i)}$, а решение задачи соответствует исходной ситуации. В противном случае, выбирая значение коэффициентов $K_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, можем влиять на свойства получаемых решений. Преобразование, реализация которого обеспечит желаемую ориентацию вектора $f_{y(i)}$ и поверхности $V_{(i+1)}$ в точке x, зададим матрицей

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} f_1 & -f_2 & -f_3 & \cdots & -f_n \\ f_2 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_3 & 0 & f_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & 0 & 0 & \cdots & f_1 \end{vmatrix},$$

где $f_1, \cdots, f_n$ - значение элементов вектора $f_{y(i)}$. Определитель этой матрицы вычисляется по формуле $\Delta = f_1^{\,n-2} f_{y(i)}^T f_{y(i)}$, содержащей в правой части сомножитель f_1. Следовательно, если элементы вектора $f_{y(i)}$, выражаемые величиной $f_1 \neq 0$, то матрица S^{-1} - невырожденная, и существует обратная ей матрица S. Введём выражение элементов первой строки этой матрицы

$$S_{1k} = \left(f_{y(i)}^T f_{y(i)}\right)^{-1} f_k, \left(k = 1, n\right). \tag{9}$$

Также вводим преобразование $\dot{Z} = SK\dot{x}$. Тогда вектор $f_{z(i)} = Sf_{y(i)} = SKf_{x(i)}$. Основное свойство преобразования $\dot{Z}$ и вектора $f_{z(i)}$ состоит в том, что если не все элементы вектора $f_{y(i)}$ одновременно равны нулю, то $f_{z(i)} = E_1$. Это значит, что на новой фазовой плоскости состояние объекта (1) с управлением u_i будем описывать выражением вида

$$\dot{Z} = f_{z(i)}. \tag{10}$$

Кроме этого, в произвольный момент времени не равен нулю только первый элемент вектора $\dot{Z}$.

Используя матрицы K и S, запишем (7) в эквивалентной форме

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)} K^{-1} S^{-1} SKf_{x(i)} = -Q_x - Ru_{(i)}^2.$$

После упрощения этого выражения получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right)_{(i+1)} E_1 = -Q_x - Ru_{(i)}^2, \tag{11}$$

где

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right)_{(i+1)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)} K^{-1} S^{-1} \tag{12}$$

Представляет $n-$мерный вектор частных производных функции V в системе координат новой фазовой плоскости состояния системы.

С учётом свойств соотношений (10) и (11) первый элемент вектора $\left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right)_{(i+1)}$ будет равен $-\left(Q_x + Ku_{(i)}^2\right)$, а остальные элементы - нулевые. При этом справедливо выражение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right)_{(i+1)} = -E_1^T\left(Q_x + Ru_{(i)}^2\right). \qquad (13)$$

Тогда с учетом выражений (12) и (13) справедливо выражение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{(i+1)} = -E_1^T SK\left(Q_x + Ru_{(i)}^2\right). \qquad (14)$$

Входящее в правую часть (14) произведение $E_1^T S$ имеет размерность n – мерной строки и совпадает с первой строкой матрицы S. Её элементы определяются из зависимости (9). Следовательно, предыдущее соотношение с учётом корреляции векторов $f_{x(i)}$ и $f_{y(i)}$ представим в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T_{(i+1)} = -\left(\frac{Q_x + Ru_{(i)}^2}{f_{x(i)}^T K^T K f_{x(i)}}\right) K^T K f_{x(i)}, \qquad (15)$$

где $f_{x(i)} = f(x) + G(x)u_{(i)}$ - правая часть уравнения (1). В случае, когда матрица $K = E$, знаменатель выражения (13) с учётом структуры модели (1) записывается в виде

$$f^T(x)f(x) + q^2 u_i^{\,2}. \qquad (16)$$

Результаты.

Результатом математических изложений из зависимостей (11)-(16)

получаем выражения для формирования управляющих воздействий, адекватное выражению (8), в виде

$$u_{(i+1)} = \left(\frac{Q_x + Ru_{(i)}^2}{2R\left[f_{(x)}^T f(x) + q^2 u_{(i)}^2\right]}\right) q^2 u_{(i)}.$$

Выводы.

Таким образом, предложенный итеративный алгоритм позволяет формировать нелинейные управляющие воздействия для сложных динамических систем. Реализация этого алгоритма позволит существенно упростить вычислительные процедуры при организации синергетического управления большими динамическими объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян Р.М.* Алгоритмы оценки качества и синтеза линейных систем управления. Рига: ЛРП ВНТОМ, 1989, - 52 с., библиогр. 9 наимен.
2. *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1987. – 712с.
3. *Колесников А.А.* Проблемы системного синтеза: тенденции развития и синергетический подход // Управление и информационные технологии. Всероссийская конференция 3-4 апреля 2003 г. Санкт-Петербург. Сборник докладов в двух томах. Том 1. с.5-12.
4. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с., ил.

 ISSN 1562-9945