

І. М. Дронюк, М. А. Назаркевич

**ПРОСТОРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ АТЕВ-ФУНКЦІЙ****Вступ**

Великий інтерес представляє моделювання нелінійних систем, які описуються диференціальними рівняннями, отриманих методом усереднення з нелінійної механіки. Такі диференціальні рівняння описують консервативні коливні системи без тертя, нелінійні автономні коливні системи з одним ступенем свободи, та системи, що взаємодіють з джерелом енергії [1].

Застосування Атев-функцій для побудови розв'язків певних класів істотно нелінійних диференціальних рівнянь представлено у роботах [2-4]. Розроблені аналітичні методи їх дослідження є складними, отримані аналітичні співвідношення у застосуванні до моделювання потребують спеціального інструментарію для їх обчислення. Для керування динамічними процесами в істотно нелінійних коливних системах з одним ступенем вільності необхідно отримати чисельні значення розв'язків з високою точністю. Нами у роботах [5,6] розроблено алгоритми та методи обрахунку значень розв'язків, знайдених аналітично у [2-4], з довільною потрібною точністю.

У даній роботі продовжено дослідження і промодельовано поведінку Атев-функцій у залежності від зміни їх параметрів. Спеціальну увагу зосереджено на моделюванні періоду для періодичних Атев-функцій та області визначення для аперіодичних Атев-функцій.

**Диференціальні рівняння, розв'язні з допомогою Атев-функцій**

Динамічні процеси в нелінійних коливних системах описуються за допомогою системи диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю вигляду [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} + \beta y^m = 0 \\ \dot{y} + \alpha x^n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де  $\alpha, \beta$  - деякі дійсні сталі, а

$$n = \frac{2\theta'_1 + 1}{2\theta''_1 + 1}, \quad m = \frac{2\theta'_2 + 1}{2\theta''_2 + 1}, \quad (\theta'_1, \theta''_1, \theta'_2, \theta''_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Розглянемо два випадки, а саме

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{1}{m+1}; \quad (3)$$

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}, \quad (4)$$

де  $m$  і  $n$  визначаються формулами (2).

Для знаходження розв'язків системи (1) використовуються Beta-функції та Ateb-функції [4], що є оберненими функціями до Beta-функцій.

Система (1), якщо  $m, n$  задовільняє співвідношення (3), описує коливальний рух, а, якщо  $m, n$  задовільняє співвідношення (4), – гіперболічний (аперіодичний) рух. Відповідно Ateb-функції, побудовані для значень (3), прийнято називати періодичними, а для значень (4) – гіперболічними (аперіодичними) Ateb-функціями [3].

Якщо  $m = 1$ , а  $n$  заданий (2) (відповідає випадку гіперболічності), то систему (1) можна привести до вигляду

$$\ddot{x} + c|x| \cdot x^{\theta-1} = 0 \quad (5)$$

де  $\theta$  залежить від параметрів  $\theta'_1, \theta'_2$  з (2).

### Побудова поверхонь Ateb-функцій

В даній праці досліджується поведінка Ateb-функцій залежно від параметрів  $m, n$ . Аперіодичні Ateb-функції  $v = sha(n, m, \omega)$  і  $u = cha(m, n, \omega)$  є оберненням інтегралів

$$\frac{n+1}{2} \int_0^{0 \leq v \leq \infty} \frac{dv}{(1+v^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} = \omega, \quad \frac{m+1}{2} \int_1^{1 \leq u \leq \infty} \frac{du}{(\bar{u}^{m+1} - 1)^{\frac{n}{n+1}}} = \omega, \quad (6)$$

де  $\omega$  - незалежна змінна ( $-\infty \leq \omega \leq \infty$ ), а  $m$  і  $n$  – параметри.

Функції  $sha(n, m, \omega)$  і  $cha(m, n, \omega)$  відносно  $\omega$  -  $2\Pi'(m, n)$

періодичні, де  $2\Pi' = B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right)$  - Beta-функція. Величина

$\Pi'(m, n)$  для всіх значень  $m$  і  $n$  скінченна і неперервна, за виключенням значень, що задовільняють нерівність

$$\frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq 0 \quad (7)$$

при яких  $\Pi'(m, n)$  перетворюється в безмежність. Умова (7) відповідає умові гіперболічності (4).

Розглянемо функції

$$\hat{O}_1(w, v) = w - \frac{n+1}{2} \int_0^v \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \quad (8)$$

$$\hat{O}_2(w, u) = w - w_0 - \frac{m+1}{2} \int_1^u \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^{\frac{n(m+1)}{n+1}} \left(1 - \frac{1}{\bar{u}^{m+1}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} \quad (9)$$

де

$$w_0 = \frac{n+1}{2} \int_0^1 \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \quad (10)$$

Вираз (10) відповідає гіперболічному виду функцій. Побудовано залежності виразу  $w_0$ , заданого формулою (11), від зміни параметрів  $n, m$  при

$$0 < n < 1, \quad 0 < m < 1.$$

Для цього обчислено значення  $w_0$  при зміні  $n, m$  з кроком 0,1 і побудовано поверхню, представлену на рис.1.

Введемо позначення

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{n}{n+1}} (1-t)^{-\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right)} dt \quad (11)$$

Оскільки розглядаємо аперіодичні Атеб-функції, то виконуються умова гіперболічності (4) або (7), при якій  $\Pi^*$  перетворюється у нескінченність [2, 3, 4]. Для всіх решта значень  $n, m$  величина  $\Pi^*$  скінченна. Також (11) можна представити у вигляді

$$2\Pi^*(m,n) = B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right)\Gamma\left(1 - (2+m+n)\left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)}{\Gamma(n(m+1))} \quad (12)$$

де  $B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right)$  - числові значення повної Beta-функції, а  $2\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right)$ ,  $\Gamma\left(1 - (2+m+n)\left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ ,  $\Gamma(n(m+1))$  - значення повної Гама-функції.

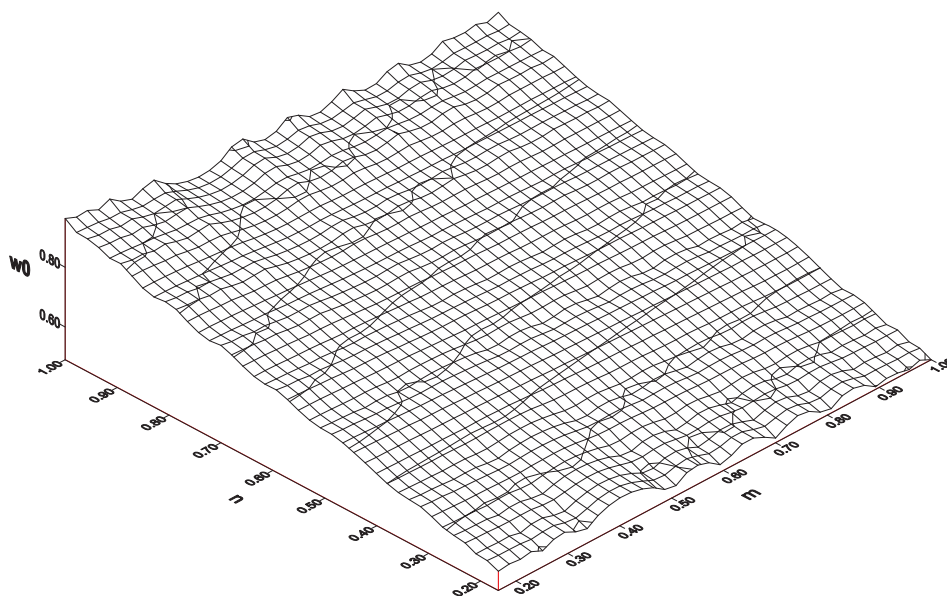


Рисунок 1 – Поверхня значень  $\omega_0$  при зміні  $n, m$  з кроком 0,1

Тоді для проміжку  $0 \leq V \leq \infty$  отримуємо,

$$\frac{n+1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{m+1}} = \omega \quad , \text{ якщо } \begin{cases} 0 \leq \omega \leq \Pi^* \\ 0 \leq v \leq \infty \end{cases} \quad (13)$$

що відповідає формулі (8). Враховуючи непарність функції  $sha(n, m, \omega)$  відносно  $\omega$ , випливає, що вона є оберненням інтегралу (11) на проміжку  $[-\Pi^*, \Pi^*]$ .

Обчислено значення  $\Pi^*$  при зміні  $n, m$  з кроком 0,1 і побудовано поверхню, представлену на рис.2.

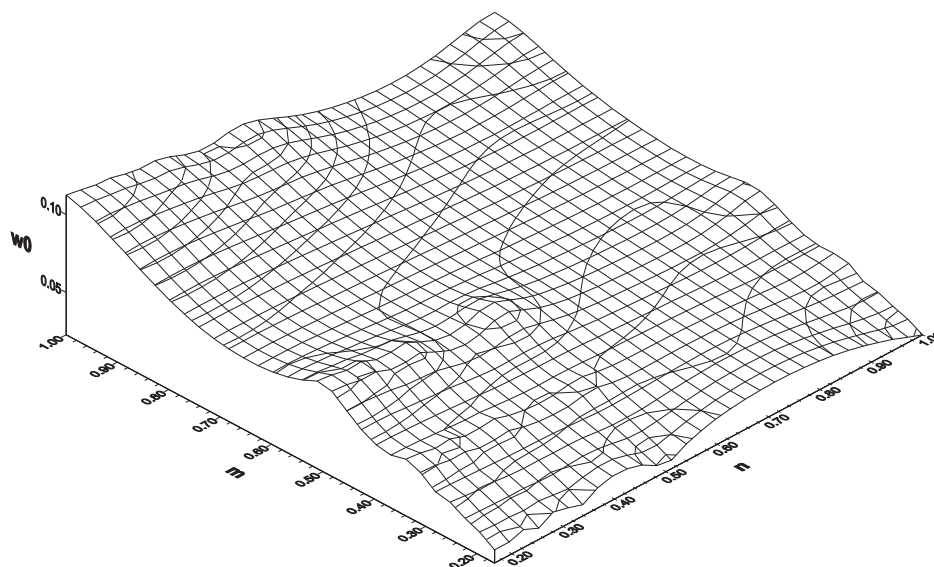


Рисунок 2 – Поверхня функції  $P^*(m, n)$  в залежності від параметрів  $m$  і  $n$

Теорія періодичних Ateb-функцій разом із використанням сучасних обчислювальних технологій дає потужний апарат для імітаційного моделювання та керування динамічними процесами істотно нелінійних систем. Знайдені розв'язки описують динамічні процеси у нелінійних коливних системах і можуть бути застосовані для керування у бурових установках нафтових промислів, вентиляційних каналах шахт, трубопроводах з метою діагностики та прогнозування їхньої поведінки.

#### Алгоритм обчислення числа $\pi$ на основі Ateb-функцій

При  $m = n = 1$  Ateb-функції співпадають з тригонометричними і гіперболічними функціями. Мають місце формули

$$[\text{cha}(m, n, \omega)]^{m+1} - [\text{sha}(n, m, \omega)]^{n+1} = 1 \quad (14)$$

$$[\text{cha}(m, n, \omega)]^{m+1} + [\text{sha}(n, m, \omega)]^{n+1} = 1 \quad ,$$

що є аналогами основних тотожностей для тригонометричних та гіперболічних функцій.

Теорія Ateb-функцій дозволяє знайти число  $\pi$  з будь-якою потрібною точністю. Відомо [7], що наближене значення числа

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795. \quad (15)$$

Представимо метод обчислення числа  $\pi$  на основі Ateb-функцій. Метод базується на доведеному в [3] положенні, що при параметрах  $m=1$ ,  $n=1$  Ateb-функції перетворюються у звичайні тригонометричні функції. Отже для обчислення числа  $\pi$  можна використати формулу періоду Ateb-функції у вигляді (11) та (12).

З формули (11) при  $m = 1$ ,  $n = 1$  отримаємо

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-1} dt. \quad (16)$$

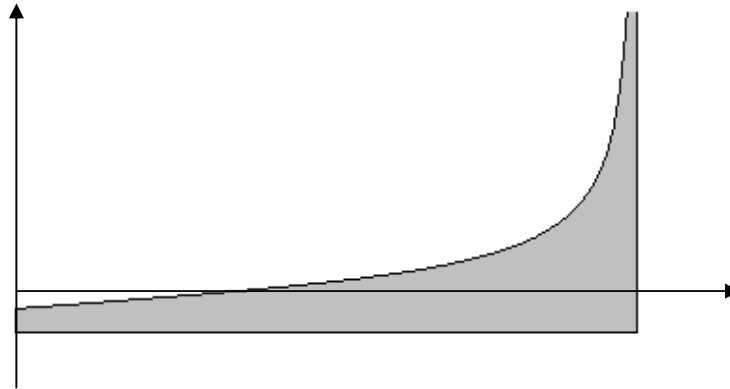
Цей інтеграл є невластивим інтегралом другого роду, оскільки підінтегральна функція прямує до нескінченності, що показано на рис. 3.

З формул (12) при  $m = 1$ ,  $n = 1$  випливає

$$2\Pi^*(m, n) = B\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(0)}{\Gamma(2)} \quad (17)$$

Значення числа  $\pi$  відповідає площі нескінченної криволінійної трапеції, заштрихованої на рис. 3. Для обчислення використовуємо формулу (16) та обчислюємо цей інтеграл чисельними методами. Для порівняння отриманих результатів використовуємо формулу (17). Для обчислення похибки за точне значення  $\pi$  беремо вираз (15). Обчислення інтегралів здійснюється відомими методами прямокутників, парабол, Монте-Карло [8]. Трудність обчислення полягає у невластивості обчислюваного інтегралу. Застосування одного з відомих методів не дає потрібної точності. Для отримання кращої точності обчислень при моделюванні було застосовано комбінації цих методів.

Опишемо алгоритм моделювання. Для обчислення інтегралу проміжок  $[0;1]$  розбивається на декілька підпроміжків:  $[0;1] = [0;\alpha] \cup [\alpha;1]$ , де  $0.8 \leq \alpha < 1$ . Очевидно, що невластивість інтегралу зберігається на проміжку  $[\alpha;1]$ . Тому для досягнення потрібної точності обчислень на цьому проміжку кількість ітерацій зростає у тисячі разів.



1

### Висновки

Представлено систему диференціальних рівнянь зі степеневу нелінійністю, що описує динамічні процеси в складних системах.

Розроблено алгоритми для знаходження розв'язків вказаної системи у вигляді Ateb-функцій. Розглянуто періодичні та аперіодичні Ateb-функції.

Промодельовано поведінку Ateb-функцій з різними показниками нелінійності. Складність обчислень полягає в одночасному використанні методів наближеного обчислення інтегралу та пошуку нульового значення функцій заданих неявно.

Побудовані поверхні шуканих розв'язків у вигляді Ateb-функцій.

Показано, що у граничному випадку Ateb-функції співпадають зі звичайними тригонометричними і гіперболічними функціями. Для ілюстрації побудовано алгоритм обчислення числа  $\pi$  на основі представленої теорії.

Результати обчислень можуть бути використані в задачах управління з метою прогнозування та діагностики поведінки складних систем.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
2. Сокіл Б. І. Про асимптотичні наближення розв'язку для одного нелінійного неавтономного рівняння // Укр. мат. журнал. — 1997. — 49, № 11. — С. 1580-1583.

3. Возний А. М. Застосування Атеб-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь. — Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1970. — № 9. — С. 971-974.
4. Сенік П. М. Обращение неполной Вета-функции. — Укр. мат. журн. — 1969. — Т. 21, № 3. — С. 325-333.
5. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій Доповіді НАН України, м.Київ, 2007, № 12. С. 37 – 43.
6. І.М.Дронюк, М.А.Назаркевич До розв'язування одного класу звичайних нелінійних диференціальних рівнянь//Фізико-технічне моделювання та інформаційні технології. – Львів. Науковий збірник.№ 6. 2007. С. 136-140.
7. wikipedia
8. Цегелик Г.Г. Чисельні методи// Львів: Вид.ЛНУ ім.І.Франка, 2004.-408 с.