

**ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРУГОГО
ПЕРИФЕРИЙНОГО ЭЛЕМЕНТА В СОСТАВЕ КА В ЗАДАЧЕ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЕГО МЕХАНИЧЕСКОГО
ЭКВИВАЛЕНТА**

Введение

Одной из составляющих процедуры исследования динамики сложных механических систем, содержащих распределенные упругие элементы, является упрощение расчетной схемы. Упрощение может быть произведено, в частности, путем замены упругих элементов с распределенными параметрами их механическими эквивалентами с сосредоточенными параметрами. Это избавляет от необходимости иметь дело с уравнениями в частных производных и делает более наглядным процесс моделирования движения. Это позволяет также использовать средства визуального моделирования, например, пакета SimMechanics в системе MatLab, который не предоставляет возможность прямого моделирования динамики упругих тел с распределенными параметрами.

В [1,2] рассмотрена задача упрощения расчетной схемы при исследовании влияния динамики распределенного упругого элемента в составе КА на движение КА. С этой целью предложена процедура определения характеристик механического объекта с сосредоточенными параметрами, который эквивалентен по динамическим свойствам исходному распределенному упругому элементу. Для обеспечения эквивалентности в условиях больших перемещений использовано требование одинаковости характеристик «жестких вариантов» сравниваемых объектов. Для обеспечения эквивалентности применительно к упругим отклонениям использован метод сопоставления механических расчетных схем распределенного упругого элемента и его эквивалента путем сравнения передаточных функций. При определении передаточных функций в качестве входных величин рассматриваются силовые воздействия (силы и

моменты), приложенные к некоторым характерным точкам распределенного упругого элемента, в частности, к точке его крепления к КА. В качестве выходных величин – перемещения (линейные и угловые) распределенного упругого элемента в точке его крепления к КА.

Известен метод суперэлемента [3] определения характеристик механического объекта с сосредоточенными параметрами, который эквивалентен по отдельным механическим свойствам исходному распределенному упругому элементу в составе ветроэнергетической установки. В задаче упрощения расчетной схемы при исследовании влияния движения распределенного периферийного упругого элемента в составе КА на движение КА может быть использован этот метод. Отметим, что два названных метода отличаются с постановочной точки зрения. Первый из них предназначен для изучения движения тела (или системы таких тел), к которому прикреплен распределенный упругий элемент, без акцентирования внимания на поведении упругого элемента. Второй метод предполагает изучение поведения и динамического нагружения самого распределенного упругого элемента.

В связи с вышеизложенным представляет интерес получение соотношений для передаточных функций распределенного упругого элемента и оценка метода суперэлемента с точки зрения использования аппарата передаточных функций. В настоящей статье рассмотрен распределенный упругий элемент в виде протяженной упругой балки.

Передаточные функции

При получении уравнений движения многоэлементных механических систем, в том числе содержащих распределенные упругие элементы, часто записывают уравнения динамики для каждого отдельного элемента системы. При этом каждый элемент рассматривают как свободный, а связи с соседними элементами заменяют приложенными с их стороны силами и моментами.

В [4] приведен вывод справедливых в рамках линейной теории вязкоупругости уравнений движения свободной большой космической конструкции произвольной конфигурации. Для случая плоского движения свободной упругой балки при пренебрежении зависимостью

силовых воздействий от упругих координат и при учете поперечных колебаний балки уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\dot{R}_x = V_x + \dot{\phi} \cdot R_y, \quad \dot{V}_x = \dot{\phi} \cdot V_y + m^{-1} \cdot T_x, \quad (1)$$

$$\dot{R}_y = V_y - \dot{\phi} \cdot R_x, \quad \dot{V}_y = -\dot{\phi} \cdot V_x + m^{-1} \cdot T_y, \quad (2)$$

$$\ddot{\phi} = J^{-1} \cdot (M + x_T \cdot T_y - u(x_T) \cdot T_x), \quad (3)$$

$$\ddot{q}_k + 2\chi b \Omega_k^2 \cdot \dot{q}_k + \Omega_k^2 \cdot q_k = -\dot{\phi}^2 \cdot q_k + T_y \cdot U_k(x_T) + M \cdot U'_k(x_M), \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$. В соотношениях (1-4) и на поясняющем рисунке 1 используются следующие обозначения: $\Sigma\xi\eta$ – инерциальная система координат (ИСК); Sxy – средняя система координат (ССК), связанная с недеформированной балкой; C – центр масс балки; R – радиус-вектор центра масс балки в ИСК; ϕ – угловое положение балки относительно ИСК; ρ – радиус-вектор элемента балки в ССК; u – поперечное отклонение элемента балки; V – вектор скорости центра масс балки; l – длина балки; m – масса балки; N – число учитываемых мод колебаний балки; Ω_k – k -я круговая частота поперечных свободных колебаний балки; χ и b – безразмерный параметр и константа в выражении для элементарной работы диссипативных сил [4]; J – главный центральный момент инерции относительно оси перпендикулярной плоскости движения, $q_k = q_k(t)$ – k -я упругая обобщенная координата, функция времени t ; $U_k(x)$ – k -я форма упругих поперечных колебаний; точкой обозначены производные по времени, штрихом – производные по координате x . В соотношение (4) по сравнению с [4] введено слагаемое, учитывающее влияние изгибающего момента, процедура учета которого описана в [5].

Соотношения (1-4) записаны для случая приложения к свободной балке сосредоточенной силы T в точке с координатой x_T и сосредоточенного изгибающего момента M , приложенного в точке с координатой x_M . Индексы x и y в соотношениях (1-4) обозначают проекции соответствующих величин на оси ССК. Формы поперечных колебаний нормированы так, что

$$\gamma A \cdot \int_{-l/2}^{l/2} U_n(x) \cdot U_k(x) dx = \delta_{nk}, \quad (5)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера; γ – плотность материала; A – площадь поперечного сечения балки.

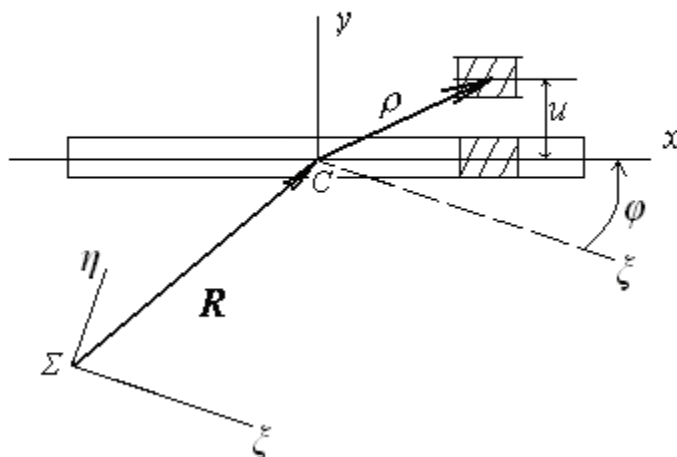


Рисунок 1 – Системы координат

При более общей форме записи соотношения (4) следует вместо $U_i(x)$ подставить выражение [6] $f_i(x) \cdot (m_i^{corr})^{-1}$, где приведенная масса i -того тона колебаний $m_i^{corr} = \gamma A \cdot \int_{-l/2}^{l/2} f_i^2(x) dx$ и $f_i(x)$ – собственные формы изгибных колебаний, $i = 1, 2, \dots, N$.

Соотношения для координат ξ , η произвольного элементарного участка балки с координатой x и угла θ поворота его сечения относительно оси $\Sigma\xi$ имеют следующий вид

$$\xi(x, t) = (R_x(t) + x) \cdot \cos \varphi(t) - (R_y(t) + u(x, t)) \cdot \sin \varphi(t), \quad (6)$$

$$\eta(x, t) = (R_x(t) + x) \cdot \sin \varphi(t) + (R_y(t) + u(x, t)) \cdot \cos \varphi(t), \quad (7)$$

$$\theta(x, t) = \varphi(t) + u'(x, t), \quad (8)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot f_n(x), \quad u'(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot f_n'(x). \quad (9)$$

Для получения передаточных функций систему уравнений (1-4, 5, 6-9) необходимо линеаризовать. Проведя линеаризацию около невозмущенного положения балки, которое характеризуется значениями параметров

$$\begin{aligned} R_x &= R_x^*, \quad V_x = 0, \quad R_y = R_y^*, \quad V_y = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \\ q_k &= 0, \quad \dot{q}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

и переходя от временных зависимостей к их изображениям по Лапласу, получим следующие соотношения:

$$\tilde{\eta}(s, x, x_T, x_M) = W^{T\eta} \cdot \tilde{T}_y(s) + W^{M\eta} \cdot \tilde{M}(s),$$

$$\tilde{\theta}(s, x, x_T, x_M) = W^{T\theta} \cdot \tilde{T}_y(s) + W^{M\theta} \cdot \tilde{M}(s),$$

где тильдой обозначены изображения по Лапласу соответствующих временных зависимостей, $W^{T\eta}$, $W^{M\eta}$, $W^{T\theta}$, $W^{M\theta}$ – передаточные функции от изображения приложенной в точке x_T силы $T_y(t)$ и от изображения приложенной в точке x_M момента $M(t)$ к изображению в точке с координатой x перемещения $\eta(x, t)$ элемента балки и к изображению угла $\theta(x, t)$ поворота его сечения, соответственно. Введем обобщающее обозначение W^{Fz} для названных передаточных функций, где индекс F может принимать значения T и M , а индекс z – η и θ . Для передаточных функций справедливы следующие соотношения

$$W^{Fz} = W^{Fz}(s, x, x_T, x_M) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{Fz}, \quad (10)$$

$$W_0^{Fz} = \frac{k_0^{Fz}}{s^2}, \quad (11)$$

$$W_n^{Fz} = \frac{k_n^{Fz}}{s^2 + 2\chi b \Omega_n^2 s + \Omega_n^2}, \quad (12)$$

где

$$k_0^{T\eta} = k_0^{T\eta}(x, x_T) = m^{-1} + x \cdot J^{-1} \cdot x_T, \quad (13)$$

$$k_0^{M\eta} = k_0^{M\eta}(x) = x \cdot J^{-1}, \quad (14)$$

$$k_0^{T\theta} = k_0^{T\theta}(x_T) = J^{-1} \cdot x_T, \quad (15)$$

$$k_0^{M\theta} = J^{-1}, \quad (16)$$

$$k_n^{T\eta} = k_n^{T\eta}(x, x_T) = f_n(x) \cdot f_n(x_T) / m_n^{corr}, \quad (17)$$

$$k_n^{M\eta} = k_n^{M\eta}(x, x_M) = f_n(x) \cdot f'_n(x_M) / m_n^{corr}, \quad (18)$$

$$k_n^{T\theta} = k_n^{T\theta}(x, x_T) = f'_n(x) \cdot f_n(x_T) / m_n^{corr}, \quad (19)$$

$$k_n^{M\theta} = k_n^{M\theta}(x, x_M) = f'_n(x) \cdot f'_n(x_M) / m_n^{corr} \quad (20)$$

и $n = 1, 2, \dots, N$.

Без учета демпфирования варианты представления передаточных функций (10) определяются равенствами:

$$W^{Fz} = \frac{k_0^{Fz}(x, x_T)}{s^2} + \frac{k_1^{Fz}(x, x_T, x_M)}{s^2 + \Omega_1^2} + \dots + \frac{k_N^{Fz}(x, x_T, x_M)}{s^2 + \Omega_N^2}, \quad (21)$$

$$W^{Fz} = \frac{k_\sigma^{Fz}(s^2 + (n_1^{Fz})^2) \cdot (s^2 + (n_2^{Fz})^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + (n_N^{Fz})^2)}{s^2 (s^2 + \Omega_1^2) \cdot (s^2 + \Omega_2^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \Omega_N^2)}, \quad (22)$$

$$W^{Fz} = \frac{k_0^{Fz}(x, x_T)}{s^2} + k_{yc}^{Fz} \frac{c_{N-1}^{Fz} \cdot s^{2(N-1)} + c_{N-2}^{Fz} \cdot s^{2(N-2)} + \dots + c_1^{Fz} \cdot s^2 + 1}{(T_1^2 s^2 + 1) \cdot (T_2^2 s^2 + 1) \cdot \dots \cdot (T_N^2 s^2 + 1)}, \quad (23)$$

где

$$k_\sigma^{Fz} = k_0^{Fz} + k_1^{Fz} + k_2^{Fz} + \dots + k_N^{Fz}, \quad (24)$$

$$k_{yc}^{Fz} = S_1(k_1^{Fz} \varepsilon_1, k_2^{Fz} \varepsilon_2, \dots, k_N^{Fz} \varepsilon_N), \quad (25)$$

$$c_j^{Fz} = \frac{1}{k_{yc}^{Fz}} \sum_{i=1}^N k_i^{Fz} \varepsilon_i \cdot S_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_N), \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (26)$$

$$c_{N-1}^{Fz} = \frac{k_\sigma^{Fz}}{k_{yc}^{Fz}} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_N, \quad (27)$$

$$T_i^2 = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = 1 / \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

S_j – j -я элементарная симметрическая функция [7],

$n_1^{Fz}, n_2^{Fz}, \dots, n_N^{Fz}$ – нули передаточных функций.

Соотношения для передаточных функций получены для свободной упругой балки. Если на концы балки наложены иные граничные условия, то соотношения (10 - 28) будут описывать «упругие» перемещения балки, и останутся справедливыми при условии исключения из них слагаемых, содержащих нижний индекс «0», то есть, при исключении слагаемых, описывающих «жесткое» движение балки.

Представления передаточных функций в соотношениях (21), (22) и (23) могут оказаться удобными при подборе параметров механического эквивалента протяженного периферийного элемента КА, аппроксимированного в виде упругой балки. Представление передаточных функций в виде (21) целесообразно использовать при оценке вклада каждого тона колебаний. Для определения квазистатических отклонений элементов балки более удобным является представление передаточных функций в виде (23), так как коэффициент k_{yc}^{Fz} , входящий в соотношение (23), численно равен значению установившегося отклонения z при приложении единичного ступенчатого воздействия F .

Метод суперэлемента с точки зрения использования аппарата передаточных функций

Структура и параметры механического эквивалента должны удовлетворять некоторому заданному критерию. Известен метод суперэлемента, согласно которому расчетная схема упругого протяженного элемента представляется системой жестких стержней и сосредоточенных упругих элементов. В [3] рассмотрен случай балки Эйлера-Бернулли, для которой простейшим вариантом расчетной схемы является система с тремя стержнями, последовательно соединенными между собой пружинами.

Критерием выбора параметров в этом случае является равенство прогибов и углов поворота на свободном конце балки и соответствующем конце механического эквивалента при одинаковых силовых воздействиях, приложенных к этим же точкам, а также близость первой частоты собственных колебаний балки и ее механического эквивалента. Показано [3], что для обеспечения близости последующих собственных частот колебаний расчетная схема механического эквивалента может быть представлена в виде набора последовательно соединенных простейших суперэлементов. При этом добавление в расчетную схему очередного простейшего суперэлемента обеспечивает близость для очередного номера собственной частоты балки и ее механического эквивалента. Равенство прогибов и углов поворота обеспечивается в [3] подбором жесткостей пружин, а близость основной частоты собственных колебаний – соотношением длин стержней.

Представляет интерес оценка метода суперэлемента с точки зрения сопоставления характеристик передаточных функций упругого распределенного элемента и его эквивалента.

В методе суперэлемента рассматривается схема механического эквивалента, представленная на рисунке 2, при этом концевые стержни имеют одинаковую длину.

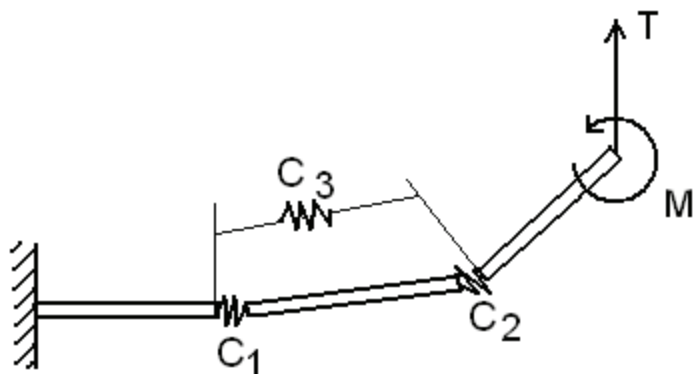


Рисунок 2 – Схема механического эквивалента в методе суперэлемента

В качестве упругого распределенного элемента здесь рассматривается упругая балка, защемленная левым концом. Прогиб δ и угол наклона ϑ свободного конца балки при приложении к нему постоянных силы T и момента M определяется соотношением:

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \vartheta \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \cdot \begin{bmatrix} 2L^3 & 3L^2 \\ 3L^2 & 6L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ M \end{bmatrix},$$

где E – модуль упругости материала балки, I – момент инерции сечения балки.

Для обеспечения равенства прогиба и угла наклона свободного конца механического эквивалента и распределенной балки при приложении к ним одинаковых усилий должны выполняться соотношения

$$C_1 = C_2 = \frac{6EI}{L} \cdot k^2 \text{ и } C_3 = \frac{EI}{L} \cdot (1 - 3k^2), \quad (29)$$

где k отношение длины среднего стержня суперэлемента ко всей его длине.

Таким образом, выбором величины k может быть обеспечено выполнение условия (29) равенства статических отклонений. Для упрощения схемы эквивалента выбирается такое значение k , при котором упругая жесткость C_3 равняется нулю. При этом фиксированном значении k получаем простейшую схему суперэлемента. К тому же оказывается, что при этом значении k первая собственная частота колебаний суперэлемента близка к первой собственной частоте колебаний соответствующей упругой распределенной балки. По второй собственной частоте – отличие почти в два раза.

Что касается метода сопоставления передаточных функций для рассматриваемого случая заземленной балки, имеем равенства

$$W^{Fz}(s, x_1, x_T, x_M) = k_{yc}^{Fz} \cdot \frac{(T_0^2 s^2 + 1)}{(T_1^2 s^2 + 1)(T_2^2 s^2 + 1)}, \quad (30)$$

$$k_{yc}^{Fz} = \frac{k_1^{Fz}}{\Omega_1^2} + \frac{k_2^{Fz}}{\Omega_2^2}, \quad T_0^2 = \frac{k_1^{Fz} + k_2^{Fz}}{k_1^{Fz} \Omega_2^2 + k_2^{Fz} \Omega_1^2}, \quad T_1^2 = \frac{1}{\Omega_1^2}, \quad T_2^2 = \frac{1}{\Omega_2^2},$$

где индекс F , как и ранее, соответствует усилиям T и M , а индекс z – отклонениям δ и ϑ .

При единичном ступенчатом воздействии $F(t) = 1(t)$, согласно предельной теореме [7], для конечного значения оригинала $z(t)$ можно получить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot W^{Fz}(s) \cdot 1/s) = k_{yc}^{Fz}.$$

Таким образом, коэффициенты усиления в передаточных функциях (30)

$$\begin{bmatrix} k_{yc}^{T\delta} & k_{yc}^{M\delta} \\ k_{yc}^{T\vartheta} & k_{yc}^{M\vartheta} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \cdot \begin{bmatrix} 2L^3 \cdot T_1 & 3L^2 \cdot M_1 \\ 3L^2 \cdot T_1 & 6L \cdot M_1 \end{bmatrix}$$

численно равны статическим упругим отклонениям на свободном конце суперэлемента при постоянных единичных воздействиях T и M , приложенных к этому же концу. То есть, жесткости шарниров рассчитанные для суперэлемента, обеспечивают равенство коэффициентов усиления передаточных функций механического эквивалента статическим отклонениям распределенной упругой балки при единичных воздействиях.

Выводы

Получены соотношения для передаточных функций распределенного упругого элемента в виде протяженной упругой балки. Эти соотношения необходимы при использовании предложенного в [1,2] и основанного на использовании аппарата передаточных функций метода определения характеристик механического объекта с сосредоточенными параметрами, который эквивалентен по динамическим свойствам исходному распределенному упругому элементу в составе КА. Также дана трактовка критерия эквивалентности, применяемого в методе суперэлемента [3], основанная на сопоставлении передаточных

функций распределенного упругого элемента и его механического эквивалента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоножко П.А., Белоножко П.П., Фоков А.А. Сопоставление механических расчетных схем пространственно развитых космических объектов методом сравнения передаточных функций// Сборник докладов и тезисов международной научно-практической конференции «Информационные технологии в управлении сложными системами». 22-23 мая 2008, г. Днепропетровск, Украина.– Днепропетровск, 2008. с.81-82.
2. Белоножко П.А., Белоножко П.П., Фоков А.А. Использование аппарата передаточных функций для определения параметров механического эквивалента периферийного протяженного упругого элемента в составе КА// Сборник докладов и тезисов международной научно-практической конференции «Информационные технологии в управлении сложными системами». 22-23 мая 2008, г. Днепропетровск, Украина.– Днепропетровск, 2008. с.83
3. D.P. Molenaar. Cost effective design and operation of variable speed wind turbines. DUP Science, Delft, The Netherlands, 2003.
4. Механика больших космических конструкций / Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. – М.: Факториал, 1997. – 302 с.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Дмитриев В.В. Формирование динамических свойств упругих конструкций. Учебное пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2005. – 72 с.
7. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.