

СИСТЕМНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 539.3 + 629.7

П.П. Белоношко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СИСТЕМАМИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Введение

Представление деформируемых упругих конструкций расчетными схемами вида совокупностей твердых тел, соединенных шарнирами – один из перспективных подходов к моделированию динамики сложных технических систем. Его привлекательность обусловлена, в частности, наличием современных программных инструментов, предназначенных для моделирования динамики систем твердых тел, например, программный комплекс “Универсальный механизм”, или пакет SimMechanics в составе MatLab. Применительно к пространственно развитым периферийным элементам космических аппаратов [1–6] актуальной является также возможность использования методов разработки систем управления для механических объектов с конечным числом степеней свободы. Одна из основных трудностей, сопряженных с использованием твердотельных расчетных схем, связана с необходимостью разработки критериев их эквивалентности расчетным схемам с распределенными параметрами.

В настоящей работе описан критерий динамической эквивалентности расчетных схем пространственно развитого периферийного элемента космического аппарата (КА) вида упругой балки и вида цепи шарнирно связанных твердых тел, основанный на сравнении передаточных функций [7–8].

Критерий динамической эквивалентности

Рассмотрим космический комплекс, состоящий из жесткого корпуса, моделируемого твердым телом, и присоединенного периферийного элемента (выдвижной штанги, фермы, панели солнечной батареи), моделируемого балкой, или цепью тел. Подобные

механические модели используются для исследования влияния упругих движений периферийного элемента на динамику комплекса [1–3, 7–9]. Разделим движение системы на перемещение КА с "отвердевшим" периферийным элементом как твердого тела, и движение системы, обусловленное упругими колебаниями периферийного элемента. Первая составляющая может быть охарактеризована движением системы координат O_0 , связанной с недеформированным комплексом "КА–периферийный элемент", по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета. Вторая составляющая характеризуется изменением вследствие деформаций периферийного элемента координат точек комплекса "КА–периферийный элемент" в системе O_0 . Для определенности будем рассматривать поперечные колебания периферийного элемента. Движение комплекса в целом будем полагать таким, что обеспечивается малость упругих отклонений точек от недеформированного положения, т.е. возможна линеаризация уравнений движения по отношению к системе координат O_0 . Далее ограничимся рассмотрением плоского случая.

Является очевидным требование равенства массово-инерционных характеристик "отвердевших" расчетных схем "КА–балка" и "КА–цепь тел". Для сопоставления упругих движений достаточно рассмотреть движение периферийного элемента по отношению к системе координат XYZ под действием силы и момента, приложенных со стороны КА в точке крепления, а также сил и моментов, приложенных к периферийному элементу извне.

На рис. 1 изображена расчетная схема периферийного элемента, представляющая собой совокупность трех последовательно соединенных твердых тел, движущаяся в плоскости XOY инерциальной системы координат XYZ . На рис. 1 обозначено:

$C_i(x_i, y_i, 0)$, m_i , I_i , – соответственно центр масс, масса и момент инерции вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i -го тела, $i = 1, 2, 3$;

$n_0(x_0, y_0, 0)$ – точка крепления тела 1 к КА;

$\vec{r}_0(x_0, y_0, 0)$ – радиус-вектор точки крепления относительно начала координат;

$n_{12}(x_{12}, y_{12}, 0)$, $n_{23}(x_{23}, y_{23}, 0)$ – точки шарнирного соединения тел 1 и 2 и 2 и 3 соответственно;

$n_{33}(x_{33}, y_{33}, 0)$ – точка предполагаемого присоединения следующего тела к цепи;

$\bar{l}_1 = \overline{n_1 n_{12}}$, $\bar{l}_2 = \overline{n_{12} n_{23}}$, $\bar{l}_3 = \overline{n_{23} n_{33}}$ – векторы, проходящие через центры масс соответствующих тел, в дальнейшем для модулей векторов используется обозначение l_i , $i = 1, 2, 3$;

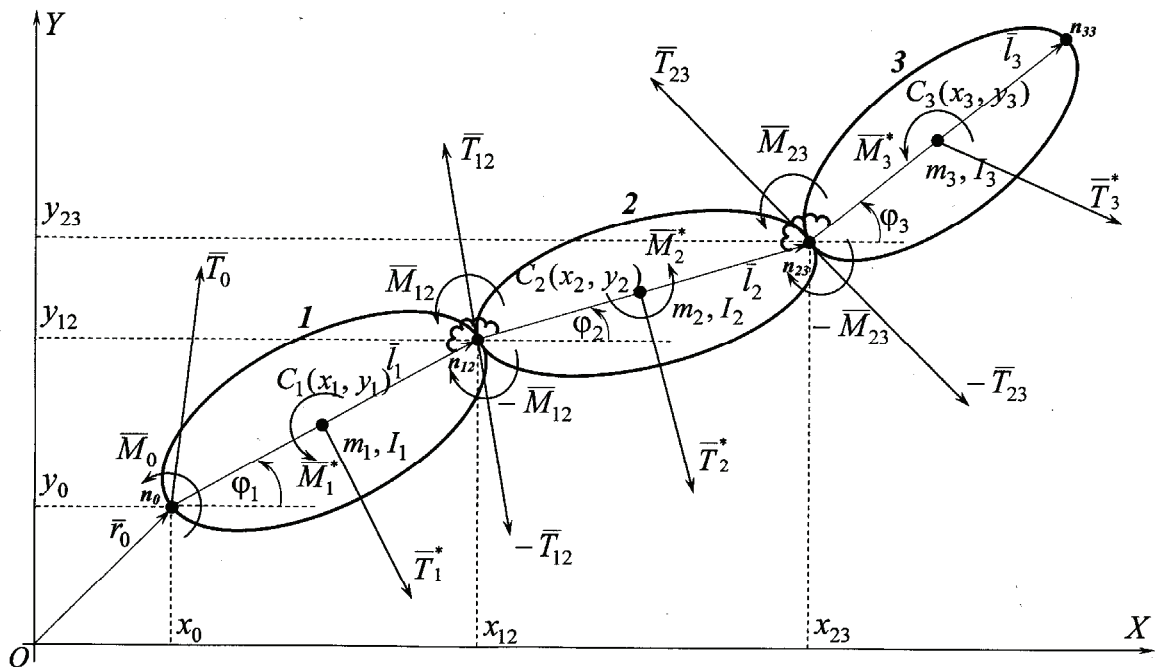


Рисунок 1 – Расчетная схема упруго деформируемого периферийного элемента КА

φ_i – углы между положительными направлениями оси OX и векторов \bar{l}_i , отсчитываемые против часовой стрелки, $i = 1, 2, 3$;

\bar{T}_0 , \bar{M}_0 – сила и момент, приложенные к телу 1 со стороны КА в точке крепления n_0 ;

\bar{T}_{12} , \bar{M}_{12} , \bar{T}_{23} , \bar{M}_{23} – силы и моменты в шарнирах;

\bar{T}_i^* , \bar{M}_i^* – главный вектор и главный момент (вокруг центра масс C_i) внешних возмущающих сил, приложенных к i -му телу, $i = 1, 2, 3$;

Будем полагать возникающий в шарнирах упругий момент линейно зависящим от угла поворота тел друг относительно друга:

$$M_{12} = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad M_{23} = c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3), \quad (1)$$

где M_{12}, M_{23} – проекции моментов в шарнирах на ось OZ , системы координат XYZ ;

c_{12}, c_{23} – постоянные коэффициенты, характеризующие упругие свойства соответствующих шарниров.

Равенства (1) записаны в предположении отсутствия диссипации энергии в шарнирах.

Введем вспомогательные векторы:

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i' = \frac{d\bar{A}_i(\varphi_i)}{d\varphi_i} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\bar{A}_i'' = \frac{d^2\bar{A}_i(\varphi_i)}{d\varphi_i^2} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_i \\ -\sin \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как центры масс тел расположены на векторах \bar{l}_i , их положение может быть определено заданием безразмерных коэффициентов k_i , характеризующих относительное расстояние от начала вектора \bar{l}_i до центра масс тела C_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда радиусы-векторы центров масс тел:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + k_1\bar{l}_1, \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_0 + \bar{l}_1 + k_2\bar{l}_2, \quad \bar{r}_3 = \bar{r}_0 + \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + k_3\bar{l}_3. \quad (3)$$

С учетом (1-3) уравнения динамики рассматриваемой цепи тел могут быть записаны в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1[\ddot{\bar{r}}_0 + k_1 l_1(\ddot{\varphi}_1 \bar{A}_1' + \dot{\varphi}_1^2 \bar{A}_1'')] = \bar{T}_0 - \bar{T}_{12} + \bar{T}_1^*, \\ m_2[\ddot{\bar{r}}_0 + l_1(\ddot{\varphi}_1 \bar{A}_1' + \dot{\varphi}_1^2 \bar{A}_1'') + k_2 l_2(\ddot{\varphi}_2 \bar{A}_2' + \dot{\varphi}_2^2 \bar{A}_2'')] = \bar{T}_{12} - \bar{T}_{23} + \bar{T}_2^*, \\ m_3[\ddot{\bar{r}}_0 + l_1(\ddot{\varphi}_1 \bar{A}_1' + \dot{\varphi}_1^2 \bar{A}_1'') + l_2(\ddot{\varphi}_2 \bar{A}_2' + \dot{\varphi}_2^2 \bar{A}_2'') + k_3 l_3(\ddot{\varphi}_3 \bar{A}_3' + \dot{\varphi}_3^2 \bar{A}_3'')] = \\ = \bar{T}_{23} + \bar{T}_3^*, \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 \bar{k}_z = \bar{M}_0 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \bar{k}_z - k_1 l_1 \bar{A}_1 \times \bar{T}_0 - (1 - k_1) l_1 \bar{A}_1 \times \bar{T}_{12} + \bar{M}_1^*, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 \bar{k}_z = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \bar{k}_z - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) \bar{k}_z - k_2 l_2 \bar{A}_2 \times \bar{T}_{12} - \\ - (1 - k_2) l_2 \bar{A}_2 \times \bar{T}_{23} + \bar{M}_2^*, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 \bar{k}_z = c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) \bar{k}_z - k_3 l_3 \bar{A}_3 \times \bar{T}_{23} + \bar{M}_3^*, \end{array} \right. \quad (4)$$

где \bar{k}_z – орт оси OZ , системы координат XYZ , символом "×" обозначено векторное произведение векторов.

Эквивалентная (4) система скалярных уравнений относительно независимых обобщенных координат $x_0, y_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ имеет вид:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_0 - (m_1k_1 + m_2 + m_3)l_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - (m_2k_2 + m_3)l_2\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - \\ - m_3k_3l_3\ddot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 - (m_1k_1 + m_2 + m_3)l_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - (m_2k_2 + m_3)l_2\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 - \\ - m_3k_3l_3\dot{\varphi}_3^2 \cos \varphi_3 = T_{0x} + T_{1x}^* + T_{2x}^* + T_{3x}^*, \quad (5)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_0 + (m_1k_1 + m_2 + m_3)l_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + (m_2k_2 + m_3)l_2\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \\ + m_3k_3l_3\ddot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 - (m_1k_1 + m_2 + m_3)l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - (m_2k_2 + m_3)l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - \\ - m_3k_3l_3\dot{\varphi}_3^2 \sin \varphi_3 = T_{0y} + T_{1y}^* + T_{2y}^* + T_{3y}^*,$$

$$m_1(1 - k_1)l_1\ddot{x}_0 \sin \varphi_1 - m_1(1 - k_1)l_1\ddot{y}_0 \cos \varphi_1 + [I_1 - m_1k_1(1 - k_1)l_1^2]\ddot{\varphi}_1 = \\ = M_0 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + l_1T_{0x} \sin \varphi_1 - l_1T_{0y} \cos \varphi_1 + \\ + (1 - k_1)l_1T_{1x}^* \sin \varphi_1 - (1 - k_1)l_1T_{1y}^* \cos \varphi_1 + M_1^*,$$

$$[m_1 + m_2(1 - k_2)]l_2\ddot{x}_0 \sin \varphi_2 - [m_1 + m_2(1 - k_2)]l_2\ddot{y}_0 \cos \varphi_2 - \\ - [m_1k_1 + m_2(1 - k_2)]l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + [I_2 - m_2k_2(1 - k_2)l_2^2]\ddot{\varphi}_2 = \\ = c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + [m_1k_1 + m_2(1 - k_2)]l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ + l_2T_{0x} \sin \varphi_2 - l_2T_{0y} \cos \varphi_2 + l_2T_{1x}^* \sin \varphi_2 - l_2T_{1y}^* \cos \varphi_2 + \\ + (1 - k_2)l_2T_{2x}^* \sin \varphi_2 - (1 - k_2)l_2T_{2y}^* \cos \varphi_2 + M_2^*,$$

$$(m_1 + m_2)k_3l_3\ddot{x}_0 \sin \varphi_3 - (m_1 + m_2)k_3l_3\ddot{y}_0 \cos \varphi_3 - \\ - (m_1k_1 + m_2)k_3l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - m_2k_2k_3l_2l_3\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + I_3\ddot{\varphi}_3 = \\ = c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + (m_1k_1 + m_2)k_3l_1l_3\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \\ + m_2k_2k_3l_2l_3\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3l_3T_{0x} \sin \varphi_3 - k_3l_3T_{0y} \cos \varphi_3 + \\ + k_3l_3T_{1x}^* \sin \varphi_3 - k_3l_3T_{1y}^* \cos \varphi_3 + k_3l_3T_{2x}^* \sin \varphi_3 - k_3l_3T_{2y}^* \cos \varphi_3 + M_3^*,$$

где $T_{0x}, T_{ix}^*, T_{0y}, T_{iy}^*$ – проекции сил на оси OX и OY , $i = 1, 2, 3$,

M_0, M_i^* – проекции моментов на ось OZ , $i = 1, 2, 3$.

Будем полагать, что исходному недеформированному положению комплекса КА–периферийный элемент соответствует расположение точки n_0 в начале координат и центров масс на оси абсцисс. Очевидно, что в отсутствие силовых воздействий данное положение периферийного элемента будет равновесным:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &\equiv 0, & y_0(t) &\equiv 0, & \varphi_1(t) &\equiv 0, & \varphi_2(t) &\equiv 0, & \varphi_3(t) &\equiv 0, \\
T_{0x}(t) &\equiv 0, & T_{0y}(t) &\equiv 0, & M_0(t) &\equiv 0, \\
T_{1x}^*(t) &\equiv 0, & T_{1y}^*(t) &\equiv 0, & M_1^*(t) &\equiv 0, \\
T_{2x}^*(t) &\equiv 0, & T_{2y}^*(t) &\equiv 0, & M_2^*(t) &\equiv 0, \\
T_{3x}^*(t) &\equiv 0, & T_{3y}^*(t) &\equiv 0, & M_3^*(t) &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Линеаризованные в окрестности положения (6) уравнения (5) имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
(m_1 + m_2 + m_3)\Delta\ddot{x}_0 &= \Delta T_{0x} + \Delta T_{1x}^* + \Delta T_{2x}^* + \Delta T_{3x}^*, \\
(m_1 + m_2 + m_3)\Delta\ddot{y}_0 + (m_1 k_1 + m_2 + m_3)l_1\Delta\ddot{\phi}_1 + \\
+ (m_2 k_2 + m_3)l_2\Delta\ddot{\phi}_2 + m_3 k_3 l_3 \Delta\ddot{\phi}_3 &= \Delta T_{0y} + \Delta T_{1y}^* + \Delta T_{2y}^* + \Delta T_{3y}^*, \\
-[m_1(1 - k_1)]l_1\Delta\ddot{y}_0 + [I_1 - m_1 k_1(1 - k_1)l_1^2]\Delta\ddot{\phi}_1 + c_{12}\Delta\phi_1 - c_{12}\Delta\phi_2 = \\
-l_1\Delta T_{0y} + \Delta M_0 - [(1 - k_1)l_1]\Delta T_{1y}^* + \Delta M_1^*, \\
-[m_1 + m_2(1 - k_2)]l_2\Delta\ddot{y}_0 - [m_1 k_1 + m_2(1 - k_2)]l_1 l_2 \Delta\ddot{\phi}_1 + \\
+ [I_2 - m_2 k_2(1 - k_2)l_2^2]\Delta\ddot{\phi}_2 - c_{12}\Delta\phi_1 + (c_{12} + c_{23})\Delta\phi_2 - c_{23}\Delta\phi_3 = \\
= -l_2\Delta T_{0y} - l_2\Delta T_{1y}^* - (1 - k_2)l_2\Delta T_{2y}^* + \Delta M_2^*, \\
-[(m_1 + m_2)k_3 l_3]\Delta\ddot{y}_0 - [(m_1 k_1 + m_2)k_3 l_1 l_3]\Delta\ddot{\phi}_1 - m_2 k_2 k_3 l_2 l_3 \Delta\ddot{\phi}_2 + \\
+ I_3\Delta\ddot{\phi}_3 - c_{23}\Delta\phi_2 + c_{23}\Delta\phi_3 = \\
= -k_3 l_3 \Delta T_{0y} - k_3 l_3 \Delta T_{1y}^* - k_3 l_3 \Delta T_{2y}^* + \Delta M_3^*.
\end{aligned} \right. \tag{7}$$

Символом "Δ" обозначены отклонения соответствующих переменных от положения (6). Так как рассматриваются отклонения от нулевых значений, символ "Δ" в дальнейшем опущен.

Первое уравнение системы (7), описывающее движение периферийного элемента как твердого тела вдоль оси абсцисс, не зависит от остальных, и может рассматриваться отдельно.

Введем векторы переменных состояния \bar{z} , силовых воздействий \bar{u} и координат, характеризующих вертикальное перемещение и поворот сечения, примыкающего к КА, \bar{y} в соответствии с равенством:

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \bar{z}(t) = [y_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dot{y}_0, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3]^T, \\
\bar{u} &= \bar{u}(t) = [T_{0y}, M_0, T_{1y}^*, T_{2y}^*, T_{3y}^*, M_1^*, M_2^*, M_3^*]^T, \\
\bar{y} &= \bar{y}(t) = [y_0, \varphi_1]^T,
\end{aligned}$$

где "T" – символ транспонирования.

Тогда уравнения (7) в пространстве состояний могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= \bar{A}\bar{z} + \bar{B}\bar{u}, \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{z},\end{aligned}\quad (8)$$

где \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} – матрицы, составленные из коэффициентов системы (7).

Обозначим изображения по Лапласу векторов \bar{z} , \bar{u} и \bar{y} соответственно \bar{Z} , \bar{U} и \bar{Y} :

$$\bar{Z}(s) = L\{\bar{z}(t)\}, \quad \bar{U}(s) = L\{\bar{u}(t)\}, \quad \bar{Y}(s) = L\{\bar{y}(t)\}$$

где s – переменная преобразования Лапласа.

При нулевых начальных условиях уравнения (8) в изображениях по Лапласу:

$$\begin{cases} \bar{Z}(s) = (s\bar{E} - \bar{A})^{-1}\bar{B}\bar{U}(s), \\ \bar{Y}(s) = \bar{C}(s\bar{E} - \bar{A})^{-1}\bar{U}(s), \end{cases}\quad (9)$$

где \bar{E} – единичная матрица 8×8 .

Обозначим

$$\bar{\bar{W}}(s) = \bar{C}(s\bar{E} - \bar{A})^{-1}.$$

Матрица $\bar{\bar{W}}(s)$ размерности 8×2 представляет собой матрицу передаточных функций системы. Входными величинами являются компоненты вектора $\bar{U}(s)$, выходными – компоненты вектора $\bar{Y}(s)$.

Запишем вектор \bar{u} в виде:

$$\bar{u} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]^T, \quad \bar{u}_1 = [T_{0y}, M_0], \quad \bar{u}_2 = [T_{1y}^*, T_{2y}^*, T_{3y}^*, M_1^*, M_2^*, M_3^*], \quad (10)$$

тогда

$$\begin{aligned}\bar{U}_1(s) &= L\{\bar{u}_1(t)\}, \\ \bar{U}_2(s) &= L\{\bar{u}_2(t)\}.\end{aligned}$$

Соответственно матрицу $\bar{\bar{W}}(s)$ можно представить в блочном виде:

$$\bar{\bar{W}}(s) = [\bar{\bar{W}}_1(s), \bar{\bar{W}}_2(s)], \quad (11)$$

где $\bar{\bar{W}}_1(s)$ имеет размерность 2×2 , а $\bar{\bar{W}}_2(s)$ – размерность 6×2 .

Перепишем второе равенство из (9) с учетом (10) и (11):

$$\bar{Y}(s) = [\bar{\bar{W}}_1(s), \bar{\bar{W}}_2(s)] \begin{bmatrix} \bar{U}_1(s) \\ \bar{U}_2(s) \end{bmatrix} = \bar{\bar{W}}_1(s)\bar{U}_1(s) + \bar{\bar{W}}_2(s)\bar{U}_2(s). \quad (12)$$

По смыслу введенных обозначений $\overline{\overline{W}}_1(s)$ есть матрица передаточных функций от воздействий на периферийный элемент со стороны космического аппарата, а матрица $\overline{\overline{W}}_2(s)$ – матрица передаточных функций от внешних воздействий. Выходными величинами являются компоненты вектора $\overline{Y}(s)$.

В развернутом виде матрица $\overline{\overline{W}}_1(s)$ определяется равенством:

$$\overline{\overline{W}}_1(s) = \begin{bmatrix} W_{T_{0y}y_0}(s) & W_{T_{0y}\varphi_1}(s) \\ W_{M_0y_0}(s) & W_{M_0\varphi_1}(s) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где $\overline{\overline{W}}_{T_{0y}y_0}(s)$ – передаточная функция от T_{0y} к y_0 ,

$\overline{\overline{W}}_{M_0y_0}(s)$ – передаточная функция от M_0 к y_0 ,

$\overline{\overline{W}}_{T_{0y}\varphi_1}(s)$ – передаточная функция от T_{0y} к φ_1 ,

$\overline{\overline{W}}_{M_0\varphi_1}(s)$ – передаточная функция от M_0 к φ_1 .

Рассмотрим случай отсутствия воздействий на периферийный элемент извне. Тогда выражение (12) преобразуется к виду:

$$\overline{Y}(s) = \overline{\overline{W}}_1(s)\overline{U}_1(s).$$

Если учитывать два первых тона поперечных колебаний, система уравнений движения периферийного элемента вида упругой балки под действием силы и момента, приложенных в точке крепления, также может быть приведена к виду:

$$\overline{Y}(s) = \overline{\tilde{W}}_1(s)\overline{U}_1(s),$$

где $\overline{\tilde{W}}_1(s)$ – матрица передаточных функций, элементы которой имеют тот же смысл, что и элементы матрицы $\overline{\overline{W}}_1(s)$:

$$\overline{\tilde{W}}_1(s) = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{T_{0y}y_0}(s) & \tilde{W}_{T_{0y}\varphi_1}(s) \\ \tilde{W}_{M_0y_0}(s) & \tilde{W}_{M_0\varphi_1}(s) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что физический смысл переменных y_0 , φ_1 , T_{0y} , M_0 при переходе от расчетной схемы вида цепи тел к расчетной схеме вида упругой балки сохраняется. Таким образом, равенство матричных передаточных функций $\overline{\overline{W}}_1(s)$ и $\overline{\tilde{W}}_1(s)$ является формальным критерием динамической эквивалентности сопоставляемых расчетных схем:

$$\overline{\overline{W}}_I(s) = \widetilde{\overline{W}}_I(s). \quad (14)$$

Выполнение (14) означает одинаковое движение примыкающего к КА торцевого сечения периферийного элемента, представленного балкой и цепью тел, под действием силы и момента, приложенного со стороны КА, т.е. одинаковое расчетное влияние на динамику комплекса упругих колебаний идеализированного сопоставляемыми вариантами расчетных схем периферийного элемента.

Влияние конструктивных параметров расчетной схемы вида цепи тел на ее динамическую эквивалентность расчетной схеме вида упругой балки

Будем полагать тела цепи твердыми стержнями – фрагментами "отвердевшей" балки круглого поперечного сечения длиной l и массой m , равномерно распределенной по длине. При этом очевидно совпадение массово-инерционных характеристик "отвердевших" расчетных схем. Центры масс расположены в серединах стержней ($k_1 = k_2 = k_3 = 0.5$). Упругие характеристики шарниров одинаковы ($c_{12} = c_{23} = c$). Длины стержней:

$$l_1 = l_3 = \frac{(1-k)l}{2}, \quad l_2 = kl,$$

где k – относительная длина среднего стержня.

Передаточные функции (13) представим в виде:

$$W_{rq} = \frac{k_{rq}(s^2 + n_{1rq}^2)(s^2 + n_{2rq}^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}, \quad (15)$$

где ω_1, ω_2 – собственные частоты системы,

k_{rq}, n_{1rq}, n_{2rq} – параметры числителей передаточных функций,

r – индекс усилия, принимающий значения " T_{0y} " и " M_0 ",

q – индекс перемещения, принимающий значения " y_0 " и φ_1 .

Тогда условия полной динамической эквивалентности (14) могут быть записаны в виде:

$$\omega_j = \tilde{\omega}_j, \quad k_{rq} = \tilde{k}_{rq}, \quad n_{jrq} = \tilde{n}_{jrq}, \quad j = 1, 2, \quad (16)$$

где тильдой обозначены параметры передаточных функций, соответствующие упругой балке. Полагая эти параметры заданными, проанализируем вид зависимостей параметров передаточных функций

(16) для цепи тел как функций конструктивных параметров m, l, c, k расчетной схемы.

Выражения для собственных частот системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} \omega_1^*(k), & \omega_1^*(k) &= \frac{4\sqrt{6}}{(k-1)\sqrt{1+2k-3k^2}}, \\ \omega_2 &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} \omega_2^*(k), & \omega_2^*(k) &= \frac{4\sqrt{6}}{k(k-1)\sqrt{3-2k-k^2}},\end{aligned}\quad (17)$$

и их отношение зависит только от k :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1^*(k)}{\omega_2^*(k)} = \frac{k\sqrt{k+3}}{\sqrt{3k+1}}. \quad (18)$$

Подобно соотношениям (17) для собственных частот, соотношения для параметров числителей передаточных функций (15) также могут быть представлены в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от k , а второй от m, l и c :

$$\begin{aligned}k_{T_{0y}y_0} &= \frac{1}{m} k_{T_{0y}y_0}^*(k), & n_{jT_{0y}y_0} &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} n_{jT_{0y}y_0}^*(k), \\ k_{M_{0y_0}} &= \frac{1}{ml} k_{M_{0y_0}}^*(k), & n_{jM_{0y_0}} &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} n_{jM_{0y_0}}^*(k), \\ k_{T_{0y}\varphi_1} &= \frac{1}{ml} k_{T_{0y}\varphi_1}^*(k), & n_{jT_{0y}\varphi_1} &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} n_{jT_{0y}\varphi_1}^*(k), \\ k_{M_{0\varphi_1}} &= \frac{1}{ml^2} k_{M_{0\varphi_1}}^*(k), & n_{jM_{0\varphi_1}} &= \frac{\sqrt{c}}{l\sqrt{m}} n_{jM_{0\varphi_1}}^*(k), \\ j &= 1, 2.\end{aligned}\quad (19)$$

Выражения для входящих в (19) отмеченных символом "*" сомножителей, зависящих от k , достаточно громоздки. Удобнее производить анализ соответствующих графических зависимостей, полученных после непосредственной подстановки численных значений в (8) при помощи соответствующих программных инструментов (например, пакета прикладных программ Control System Toolbox, входящего в состав MatLAB), минуя стадию символьных преобразований.

В качестве примера на рис. 2 изображены графики зависимостей $\omega_1^*(k), \omega_2^*(k), n_{1T_{0y}y_0}^*(k), n_{2T_{0y}y_0}^*(k), k_{T_{0y}y_0}^*(k)$. Из соотношений (17–19) и графиков на рис. 2 очевидно, что при заданных m, l и c выбором,

например, собственных частот $\omega_1^*(k)$ и $\omega_2^*(k)$ (из диапазона возможных значений), однозначно определяются все остальные параметры передаточных функций (15).

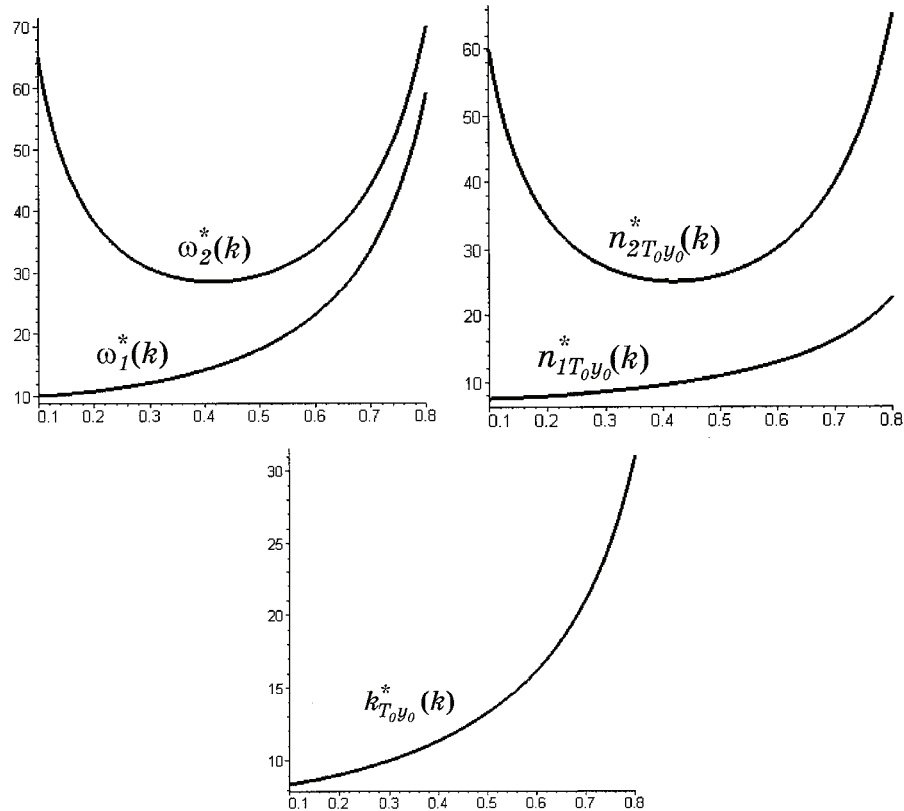


Рисунок 2 – Зависимости параметров передаточных функций цепи тел от относительной длины среднего звена

Рассмотрим цилиндрическую балку со следующими конструктивными параметрами:

$$\tilde{l} = 15 \text{ м}, \tilde{d} = 0.012 \text{ м}, \tilde{\rho} = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \tilde{E} = 2.06 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (20)$$

где \tilde{l} – длина балки,

\tilde{d} – диаметр балки,

$\tilde{\rho}$ – плотность материала балки,

\tilde{E} – модуль Юнга материала балки.

Примем, что диаметр, плотность и модуль Юнга балки постоянны по длине. Тогда масса балки будет равна $\tilde{m} = 13.232 \text{ кг}$.

В соответствии с требованием равенства массово-инерционных характеристик “отвердевших” расчетных схем, примем для цепи тел:

$$l = 15 \text{ м}, m = 13.232 \text{ кг}.$$

Первая и вторая собственные частоты изгибных колебаний балки при значениях конструктивных параметров (20):

$$\tilde{\omega}_1 = 1.533 \frac{1}{c}, \quad \tilde{\omega}_2 = 4.2257 \frac{1}{c}.$$

Те же собственные частоты

$$\omega_1 = 1.533 \frac{1}{c}, \quad \omega_2 = 4.2257 \frac{1}{c}$$

будет иметь цепь тел при

$$k = 0.26985, \quad c = 51.325 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

При этом остальные параметры передаточных функций будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{T_0y_0} &= 0.9069 \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}, & k_{T_0y_0} &= 0.7321 \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}, \\ \tilde{k}_{M_0y_0} &= \tilde{k}_{T_0y\varphi_1} = -0.2823 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}, & k_{M_0y_0} &= k_{T_0y\varphi_1} = -0.1743 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}, \\ \tilde{k}_{M_0\varphi_1} &= 0.1160 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}, & k_{M_0\varphi_1} &= 0.0541 \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}, \\ \tilde{n}_{1T_0y_0} &= 1.0648 \frac{1}{c}, & n_{1T_0y_0} &= 1.0977 \frac{1}{c}, \\ \tilde{n}_{1M_0y_0} &= \tilde{n}_{1T_0y\varphi_1} = 0.7105 \frac{1}{c}, & n_{1M_0y_0} &= n_{1T_0y\varphi_1} = 0.7815 \frac{1}{c}, \\ \tilde{n}_{1M_0\varphi_1} &= 0.4690 \frac{1}{c}, & n_{1M_0\varphi_1} &= 0.5613 \frac{1}{c}, \\ \tilde{n}_{2T_0y_0(2)} &= 3.5124 \frac{1}{c}, & n_{2T_0y_0} &= 3.7917 \frac{1}{c}, \\ \tilde{n}_{2M_0y_0} &= \tilde{n}_{2T_0y\varphi_1} = 2.9837 \frac{1}{c}, & n_{2M_0y_0} &= n_{2T_0y\varphi_1} = 3.4521 \frac{1}{c}, \\ \tilde{n}_{2M_0\varphi_1} &= 2.5745 \frac{1}{c}, & n_{2M_0\varphi_1} &= 3.1515 \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Поскольку не все равенства (16) выполняются точно, можно говорить о достижении частичной динамической эквивалентности. При этом следует отметить относительно небольшое отличие не совпадающих точно параметров, что гарантирует близость сопоставляемых динамических характеристик. Более точного выполнения равенств (16) можно достичь, например, введением дополнительных варьируемых параметров, характеризующих перераспределение массы тел цепи без нарушения принятых ранее допущений о ее геометрических и массово-инерционных характеристиках как твердого тела.

Выводы

Предложенный в работе подход к сопоставлению расчетных схем с распределенными и сосредоточенными параметрами ориентирован на использование при моделировании динамики космических аппаратов с пространственно развитыми деформируемыми периферийными элементами. Использование аппарата передаточных

функций обеспечивает определенную степень гибкости процедуры выбора конструктивных параметров, что может представлять интерес с точки зрения применения современных компьютерных средств моделирования динамики на ранних стадиях проектирования космических комплексов и разработки систем управления. В частности, возможен оперативный анализ влияния изменений конструктивного облика деформируемых элементов на динамику комплекса в целом.

Проведенные расчеты показали, что для обеспечения динамической эквивалентности балки и цепи тел необходимо введение в рассмотрение дополнительных варьируемых конструктивных параметров твердотельной расчетной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алпатов А.П., Белоножко П.А., Горбунцов В.В., Ивлев О.Г., Чернявская С.С., Шичанин В.Н. Динамика пространственно развитых механических систем изменяемой конфигурации – К.: Наукова думка, 1990. – 256 с.
2. Згуровский М.З., Бидюк П.И. Анализ и управление большими космическими конструкциями / Национальный технический ун-т Украины “Киевский политехнический ин-т”. – К.: Наукова думка, 1997. – 451 с.
3. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. – М.: Факториал, 1997. – 302 с.
4. Алпатов А.П., Белоножко П.А., Белоножко П.П., Витушкин А.А., Фоков А.А. Большие отражающие поверхности в космосе. Антенны спутниковой связи // Системные технологии – 2007. – № 3(50). – С. 73 – 87.
5. Алпатов А.П., Белоножко П.А., Белоножко П.П., Витушкин А.А., Фоков А.А. Большие отражающие поверхности в космосе. Радиотелескопы, солнечные концентраторы, плоские отражатели // Системные технологии – 2007. – № 3(50). – С. 88 – 101.
6. А.П. Алпатов, П.А. Белоножко, П.П. Белоножко, С.В. Григорьев, А. А. Фоков Актуальные задачи динамики космических аппаратов с пространственно развитыми периферийными элементами // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 32 – 38.
7. Белоножко П.А., Белоножко П.П., Фоков А. А. Сопоставление механических расчетных схем пространственно развитых космических объектов методом сравнения передаточных функций // Сборник докладов и тезисов международной научно-практической конференции «Информационные технологии в управлении сложными системами». – Днепропетровск, 2008. – С. 81–82.
8. Белоножко П.А., Белоножко П.П., Фоков А. А. Использование аппарата передаточных функций для определения параметров механического эквивалента периферийного протяженного элемента в составе КА // Сборник докладов и тезисов международной научно-

- практической конференции «Информационные технологии в управлении сложными системами». – Днепропетровск, 2008. – С. 83.
9. Закржевский А.Е. Об оптимальном угле разворота упругого космического аппарата // Прикладная механика – 2003. – т. 39. – № 1. – С. 106 – 113.