А.Н. Давидчик

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОПЕРАТОРАМИ ДЖЕКСОНА И КОРОВКИНА

Введение

Данная работа посвящена установлению асимптотически точных оценок приближения классов функций при помощи операторов Джексона и Коровкина.

Постановка задачи

Рассмотрим классы функций W_∞^r, вместо $\chi_{0,1}(L_n,\delta)_\infty$ будем писать $\chi(L_n,\delta)$

где

$$\chi_{r,k}(L_n,\delta)_p = \sup_{\left\{\substack{f\in L_p^r \\ f\neq const}\right\}} \frac{\|f-L_n(f)\|_p}{\omega_k\left(f^{(r)},\delta\right)_p}$$

или

$$\chi_{r,k}(L_n,\delta)_p = \sup_{f\in W_p^{r,k}(s)} \|f-L_n(f)\|_p .$$

Первую точную константу типа Джексона вычислил Н.П. Корнейчук. Он показал, что

$$1-\frac{1}{2n} \le \chi_{0,1}\left(T_n,\frac{\pi}{n}\right)_\infty < 1$$

Н.И. Черных доказал соотношение:

$$\chi_{0,1}\left(T_n,\frac{\pi}{n}\right)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Основное содержание.

Пусть

$$E=(P,M_n)=\sup_{f\in p} E(f;M_n)=\sup_{f\in p}\|f-L_n(f)\|$$

где $L_n(f)$ – некоторый оператор, отображающий пространство X в множестве M_n.

Обозначим через

 ISSN 1562-9945

$$\chi_{r,k}\left(L_n,\delta\right)_p = \sup_{\left\{\substack{f\in L_p^r \\ f\neq const}\right\}} \frac{\left\|f-L_n\left(f\right)\right\|_p}{\omega_k\left(f^{(r)},\delta\right)_p}$$

Оператор Коровкина определяется как

$$K_n\left(f;t\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t+u\right)\cdot K_n\left(u\right)du$$

$$K_n\left(u\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k^n\cos kt$$

где

$$\rho_k^n=\frac{n+1-k}{n+1}\cos\frac{k\pi}{n+1}+\frac{ctg\frac{\pi}{n+1}\cdot\sin\frac{k\pi}{n+1}}{n+1}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $L_n\left(f;t\right)$ положительный тригонометрический оператор,

$$\chi_{0,1}\left(L_n,\alpha_n\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\left(\frac{t}{\alpha n}+1\right)\cdot l_n\left(t\right)dt.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. При любом $\gamma>0$ и $n\to\infty$ справедливо соотношение:

$$\chi\left(D_n,\frac{\gamma}{n}\right)=1+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}Q\left(\frac{k\gamma}{4}\right)+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

где

$$Q\left(z\right)=\int_z^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^4}dt$$

Доказательство. В силу леммы 1.

$$\chi\left(D_n,\frac{\gamma}{n}\right)=1+\frac{3}{\pi N\left(2N^2+1\right)}\int_0^{\pi}E\left(\frac{nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt/2}{\sin^4 t/2}dt \qquad \left(N=E\left(\frac{n}{2}\right)+1\right).$$

Отсюда получаем:

$$\chi\left(D_n,\frac{\gamma}{n}\right)\leq 1+\frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)}\int_0^{\pi/2}E\left(\frac{2nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt}{t^4}dt+\frac{14{,}4n}{\pi N\left(2N^2+1\right)\gamma}\times$$

$$\times\int_{\gamma/2n}^{\pi/2}\frac{\sin^4 Nt}{t}dt+\frac{4{,}4n}{\pi\gamma N\left(2N^2+1\right)}\int_{\gamma/2n}^{\pi/2}t\cdot\sin^4 Ntdt=1+\alpha_n+\beta_n+\sigma_n$$

и

$$\chi\left(D_n,\frac{\gamma}{n}\right)\geq 1+\alpha_n$$

Ясно, что

$$\sigma_n=0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и

$$\beta_n = \frac{14{,}4n}{\pi\gamma N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_{\gamma/2n}^{\pi/2} \frac{\sin^4 Nt}{t}\,dt = 0\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

Таким образом

$$\chi\left(D_n, \frac{\gamma}{n}\right) = 1 + \alpha_n + 0\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

для $n = 2N$

$$\alpha_n = \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\pi/2} E\left(\frac{2nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt}{t^4}\,dt = \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\infty} E\left(\frac{4Nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt}{t^4}\,dt -$$

$$- \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_{\pi/2}^{\infty} E\left(\frac{4Nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt}{t^4}\,dt = \frac{6N^2}{\pi\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\infty} E\left(\frac{4t}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt -$$

$$- \frac{6N^2}{\pi\left(2N^2+1\right)} \int\limits_{\pi N/2}^{\infty} E\left(\frac{4t}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt = \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} Q\left(\frac{k\gamma}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Для $n = 2N - 1$

$$\alpha_n = \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\pi/2} E\left(\frac{2nt}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 Nt}{t^4}\,dt =$$

$$= \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\pi/2} E\left(\frac{4(N-0{,}5)t}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 (N-0{,}5)t}{t^4}\,dt + 0\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{6(N-0{,}5)^3}{\pi N\left(2N^2+1\right)} \int\limits_0^{\infty} E\left(\frac{4t}{\gamma}\right)\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt + 0\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} Q\left(\frac{k\gamma}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

Сопоставляя эти соотношения, получим утверждение теоремы:

Следствие. Имеет место соотношение

$$\sup_{n=1,2,3...} \chi\left(D_n, \frac{1}{n}\right) = 7 - \frac{21}{2\pi} = 3{,}6577...$$

Доказательство. Так как $\chi\left(D_{2k}, \frac{1}{2k}\right) > \chi\left(D_{2n-1}, \frac{1}{2n-1}\right)$, то будем рассматривать только $\chi\left(D_{2k}, \frac{1}{2k}\right)$.

Непосредственный просчет дает

$$\chi\left(D_2, \frac{1}{2}\right) = 7 - \frac{21}{2\pi} = 3{,}6577$$

и

$$\chi\left(D_{2k}, \frac{1}{2k}\right) < 3{,}65 \qquad (k = 2{,}3...{,}7)$$

При $k \geq 8$ имеют место следующие оценки для α_n, β_n и σ_n. Из этого следует, что

 ISSN 1562-9945

$$\alpha_{2k} = \frac{6}{\pi k\left(2k^2+1\right)}\int_0^{\pi/2} E(4kt)\frac{\sin^4 kt}{t^4}\,dt = \frac{6I_1}{\pi k\left(2k^2+1\right)}$$

и

$$I_1 < 4k^3\int_{1/4}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt.$$

Так как

$$\sin^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t,$$

то

$$I_1 < 4k^3\left(3 - 2\int_{1/2}^{\infty}\frac{\cos t}{t^3}dt + 2\int_1^{\infty}\frac{\cos t}{t^3}dt\right).$$

Кроме того

$$\int_a^{\infty}\frac{\cos t}{t^3}dt = \frac{\cos a}{2a^2} - \frac{\sin a}{2f} - \frac{1}{2}Ci\ a,$$

где

$$Ci\ a = \int_a^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt.$$

Отсюда получаем

$$I_1 < 4N^3\left(3 - 4\cos\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2} + \cos 1 - \sin 1 + Ci\ \frac{1}{2} - Ci\ 1\right) < 2{,}65N^3$$

Следовательно,

$$\alpha_{2N} = \frac{6}{\pi N\left(2N^2+1\right)}I_1 < 2{,}5308$$

Для β_{2N} имеем

$$\beta_{2N} = \frac{28{,}8}{\pi\left(2N^2+1\right)}\int_{1/4N}^{\pi/2}\frac{\sin^4 Nt}{t}\,dt \underset{=\!=}{def} \frac{28{,}8I}{\pi\left(2N^2+1\right)}$$

Используя соотношение, получим

$$I_2 = \frac{3}{8}\ln 2N\pi - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{N\pi}\frac{\cos t}{t}\,dt + \frac{1}{8}\int_1^{2N\pi}\frac{\cos t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\cdot\ln 2N\pi - 4Ci\frac{1}{2} + Ci1 + 4CiN\pi - Ci2N\pi\right).$$

Оценивая $CiN\pi$ и $Ci2N\pi$, учитывая, что $N \geq 8$, получим

$$I_2 < \frac{1}{8}\left(3\ln 2k\pi - 0{,}9\right)$$

и

$$\beta_{2k} = \frac{28{,}8}{\pi\left(2k^2+1\right)}I_2 < \frac{28{,}2\left(3\ln 2k\pi - 0{,}9\right)}{8\pi\left(2k^2+1\right)} < 0{,}1$$

Наконец

$$\sigma_{2k}=\frac{6\cdot 1{,}44}{\pi\left(2k^2+1\right)}\int\limits_{1/4N}^{\pi/2} t\cdot\sin^4 kt\,dt=\frac{6\cdot 1{,}44}{\pi\left(2k^2+1\right)}\cdot I_3$$

Далее получим

$$I_3=\frac{1}{k^2}\left(\frac{3}{8}\int\limits_{1/4}^{k\pi/2} t\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{1/4}^{k\pi/2} t\cos 2t\;dt+\frac{1}{8}\int\limits_{1/4}^{k\pi/2} t\cos 4t\;dt\right)<\frac{1}{k^2}\left(\frac{3k^2\pi^2}{64}+0{,}3\right)=\frac{3\pi^2}{64}+\frac{0{,}3}{k^2},$$

Таким образом:

$$\sigma_{2k}=\frac{8{,}64}{\pi\left(2k^2+1\right)}I_3<\frac{8{,}64}{\pi\left(2k^2+1\right)}\left(\frac{3\pi^2}{64}+\frac{0{,}3}{k^2}\right)<0{,}01,\quad (k\geq 8)$$

отсюда следует, что для $k\geq 8$

$$\chi\left(D_{2k},\frac{1}{2k}\right)\leq 1+\alpha_{2k}+\beta_{2k}+\sigma_{2k}<3{,}65,$$

что и завершает доказательство.

Выводы

В работе рассмотрены вопросы приближения операторами Джексона и Коровкина. Получены соотношения для $\gamma>0$ и при $n\to\infty$

$$\chi\left(D_n,\frac{\gamma}{n}\right)=1+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}Q\left(\frac{k\gamma}{4}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

где $D_n(f)$ – оператор Джексона

и

$$\chi\left(K_n,\frac{\pi}{n}\right)=1{,}34+O\left(\frac{\ln n}{(n+1)^2}\right)$$

где K_n – оператор Коровкина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидчик А.Н. Приближение непрерывных функции линейными положительными операторами. – В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. Днепропетровск, 1975, Вып. 6, С. 48–51.
2. Давидчик А.Н., Лигун А.А. К теореме Джексона. – Мат. заметки, 1974, Т.16, Вып.5, С. 681–690.
3. Коровкин П.П. Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье. – УМН, 1960, Т. 15, №1 (91), С. 207–212.

 ISSN 1562-9945