УДК 536.24

В.О. Яковенко

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІКРОХВИЛЬОВОГО СУШІННЯ КОЛОЇДНИХ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

Постановка проблеми. Для сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів характерна часткова усушка при втраті еластичних властивостей. Типовим представником цієї групи є деревина, яка містить як вологу набрякання, так і капілярно зв'язану вологу. Процес сушіння деревини ускладнений необхідністю одержання певної якості матеріалу (без тріщин, коробленння і зниження фізико-механічних характеристик), що вимагає використання м'яких режимів проведення процесу [1]. Традиційні конвективні способи дозволяють домогтися необхідної якості сушіння коштовних твердих порід деревини за тривалий час, у той час як умови ринку диктують скорочення тривалості виробничого циклу [2]. Скоротити тривалість процесу при збереженні належної якості деревини дозволяє сушіння матеріалу при наявності позитивного градієнта температури, отримати який можна застосовуючи вакуумні методи. Однак основною проблемою використання вакуумних технологій є труднощі підведення тепла в умовах зниженого тиску. Відомі конвективні способи підведення тепла у вакуумі не дозволяють досягти рівномірної вологості пиломатеріалу по перетину штабеля. Контактні методи відомі своєю працемісткістю процесу і незадовільною якістю, унаслідок розвитку в процесі сушіння трьох різних зон вологовмісту по перетину пиломатеріалу, що є неприпустимим, особливо для твердих порід деревини. Тому найбільш перспективними в області вакуумного сушіння деревини є способи при мікрохвильовому теплопідведенні [3 - 5]. Вакуумне сушіння пиломатеріалів з використанням мікрохвильової енергії можна здійснити чергуванням стадій нагрівання деревини і вакуумування, а також веденням процесу при стаціонарному зниженому тиску з підвищеною швидкістю потоку теплоносія.

© ЯКОВЕНКО В.О., 2008

Постановка задачі. Розглянемо нестаціонарний процес теплообміну при сушінні колоїдних капілярно-пористих матеріалів в умовах фазового перетворення «рідина – пара», що виникає під дією мікрохильового нагрівання. Такий процес будемо визначати системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвела і рівнянь теплопровідності наступного виду:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad div\,\vec{D} = 0, \quad div\,\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon(t)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(t)\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(t)\vec{E},$$

$$\frac{\partial(c_i \rho_i t_i)}{\partial \tau} + \vec{V}_i \vec{\nabla} t_i = div\left(\lambda_i \vec{\nabla} t_i\right) + q\left(t_i, \vec{E}\right),$$

де $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ – вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно, $\vec{\mathbf{D}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ – вектори електричної та магнітної індукції відповідно, $\vec{\mathbf{j}}$ – щільність струмові провідності, $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega$, μ – абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно, σ – провідність матеріалу, ω – кругова частота, $\mathbf{c}_i$, ρ_i, λ_i – коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури $\mathbf{i}$-ої фази, $\vec{\mathbf{V}}_i$ – вектор швидкості переміщення $\mathbf{i}$-го матеріалу, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона, $q = 0{,}5\omega\varepsilon' tg\delta\left|\vec{E}\right|^2$ – питома поглинена потужність, $\mathbf{t}_i$ – температура $\mathbf{i}$-го матеріалу, $tg\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ – тангенс кута діелектричних втрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі розділу фаз «рідина – пар». Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний з труднощами не тільки обчислювального характеру, алі й принциповими. Таке твердження ґрунтується на наступному: умови на межі розділу фаз є нелінійними, сформульована модель є багатомірною відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач вимагають обґрунтування та використання специфічних комп'ютерних технологій. Тому слід розглянути спрощену модель процесу, реалізацію якої можна провести методами комп'ютерного моделювання.

Виклад основного матеріалу. Побудуємо математичну модель процесу сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів під дією

 ISSN 1562-9945

енергії мікрохвильового електромагнітного поля, скориставшись наступною системою рівнянь тепло- і масообміну для пористих матеріалів [6]:

Рівняння руху і нерозривності в'язкого нестискаємого потоку:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V}, grad)\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} gradP + \nu \nabla^2 \vec{V}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + div(\rho, \vec{V}) = 0\,. \qquad (2)$$

Рівняння конвективно–дифузійного перенесення пари рідини в сушильному потоці, що рухається:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + (\vec{V}, gradc) = D\nabla^2 c\,. \qquad (3)$$

Рівняння, що описує поле температури в потоці теплоносія

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{V}, grad\ T) = a\nabla^2 T. \qquad (4)$$

Необхідно враховувати, що при взаємодії енергії мікрохвильового поля з вологим пористим матеріалом відбувається процес розігріву і висушування матеріалу з утворенням сухої зони. При цьому перенесення вологи в сухій зоні відбувається в основному у вигляді пари. Тепло – і масоперенесення здійснюється тільки молекулярним шляхом: теплопровідністю і дифузією. Незначна величина градієнтів температур, що мають місце при утворенні сухої зони, дозволяє розглядати процес у квазіізотермічних умовах. Інтенсивність процесу визначається і лімітується не теплопідведенням у зоні фазових переходів, а масопереносом у сухій зоні і потужністю джерела мікрохвильової енергії. Це дозволяє в системі рівнянь тепло- і масоперенесення для пористих матеріалів використовувати тільки нестаціонарне одномірне рівняння конвективно-дифузійного перенесення пари рідини в сушильному потоці і рівняння зв'язку між температурним і однорідним електричним полем, при нестаціонарному процесі взаємодії електромагнітної хвилі з колоїдним капілярно-пористим матеріалом, приймаючи як рухаючу силу градієнт парціального тиску водяної пари. Становить практичний інтерес дослідження двох випадків у визначенні парціального тиску водяної пари: коли можна зневажити дифузійним опором між поверхнею твердих фракцій і парогазовим середовищем, і коли це зробити не можна при постійній потужності внутрішнього джерела тепла.

Розглянемо колоїдний капілярно-пористий матеріал з початковим вологовмістом V. Заповнення пір рідкою фазою вважаємо рівномірним рівним l. Припустимо, що процес утворення сухої зони відбувається без врахування дифузійного опору, є квазіізотермічним, протікає при температурі рівній T. Парціальний тиск водяної пари P над твердою фазою, дорівнює парціальному тискові P_k насиченої водяної пари. Тоді, для визначення полів парціальних тисків газу в матеріалі і закону руху границі розподілу фаз «суха область – пар», може бути використана наступна система рівнянь [7]:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{e a_m \delta}{c} S \, , (\tau > 0, 0 < z < \xi(\tau)), \tag{5}$$

$$P(0, z) = P_K \, , \tag{6}$$

$$P(\tau, 0) = P_P \, ,$$

$$P(\tau, \xi(\tau)) = P_K \, , \tag{7}$$

$$\frac{k^2}{\bar{R}T} \frac{\partial P}{\partial z}\bigg|_{z=\xi} = \gamma V \frac{d\xi}{d\tau} \, ,$$

де k^2 – коефіцієнт дифузії водяної пари в матеріалі, e – коефіцієнт фазового перетворення рідини в пару, $\bar{R}$ – газова постійна.

Введемо нову шукану функцію, що перетворить неоднорідні граничні умови (7) до однорідних:

$$\theta(\tau, z) = P(\tau, z) - P_P - (P_K - P_P) \frac{z}{\xi} \, .$$

Щодо функції $\theta(\tau, z)$ задача (5) – (7) перетвориться до виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{(P_K - P_P)\dot{\xi} z}{\xi^2} - \frac{e a_m \delta S}{c} \, , (\tau > 0, 0 < z < \xi(\tau)) \, , \tag{8}$$

$$\theta(0, z) = (P_K - P_P)\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) , \tag{9}$$

$$\theta(\tau, 0) = \theta(\tau, \xi) = 0 \, , \tag{10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=\xi} + \frac{P_K - P_P}{\xi} = \frac{\gamma V R T}{k^2} \frac{d\xi}{d\tau} , \quad \xi(0) = \xi_0 \, . \tag{11}$$

Інтегральне перетворення Фур'є і формула звертання для сформульованої задачі мають вигляд:

$$\alpha_n(\tau) = \int_0^{\xi} \theta(z, \tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} z dz \, ,$$

$$\theta(z, \tau) = \frac{2}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} z \, ,$$

 ISSN 1562-9945

де $\alpha_n(\tau)$і $\xi(\tau)$ є рішеннями задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau}+\left(\frac{n\pi}{\xi}\right)^2\alpha_n=\frac{\dot{\xi}}{\xi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+m}\beta_{nm}\alpha_m+\frac{(-1)^{n+1}(P_K-P_P)}{\xi}+\frac{\xi e a_m \delta S}{n\pi c}\left[(-1)^n-1\right],$$

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{k^2}{\gamma VRT}\left[\frac{P_K-P_P}{\xi}+\frac{2\pi}{\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n(\tau)\right], \qquad (12)$$

$$\alpha_n(0)=\frac{\xi(0)(P_K-P_P)}{n\pi}, \quad \xi(0)=\xi_0,$$

$$\beta_{nm}=\frac{2nm}{m^2-n^2}, m\neq n; \quad \alpha_{nm}=\frac{1}{2}, \quad n=m.$$

Величина інтенсивності утворення сухої зони може бути визначена у виді:

$$J=\frac{k^2}{\overline{R}T}\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad (13)$$

де

$$P(z,\tau)=P_P(z,\tau)+(P_K(z,\tau)-P_P(z,\tau))\frac{z}{\xi(\tau)}+\frac{2}{\xi(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{\xi(\tau)}z. \qquad (14)$$

Підставляючи рівняння (14) у співвідношення (13), одержимо:

$$J=\frac{k^2}{\overline{R}T}\left[\frac{P_K-P_P}{\xi(\tau)}+\frac{2\pi}{\xi^2(\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n(\tau)\right]. \qquad (15)$$

Кількість вилученої вологи з одиниці поверхні одержимо у виді:

$$\mathrm{m}=\frac{\mathrm{k}^2}{\overline{\mathrm{R}}\mathrm{T}}\int_0^{\tau}\left[\frac{\mathrm{P_K}-\mathrm{P_P}}{\xi(\tau)}+\frac{2\pi}{\xi^2(\tau)}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{n}\alpha_{\mathrm{n}}(\tau)\right]d\tau. \qquad (16)$$

Розглянемо утворення сухої зони при наявності дифузійного опору. У цьому випадку гранична умова першого роду при $\mathbf{z=0}$ замінюється виразом:

$$k^2\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0}=\beta(P_P-P_C). \qquad (17)$$

У безрозмірній формі задача приймає наступний вид [8]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+J, \tau>0, \quad 1<y<H(\tau), \qquad (18)$$

$$\psi(1,\mathrm{y})=1, \qquad (19)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=1}=\psi_P, \ \psi(\tau,H)=1, \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=H}=k_0^{'}\frac{dH}{d\tau}, \qquad (20)$$

де $\psi=(P-P_c)/(P_K-P_c)$, $y=(z+\Delta)/\Delta$, $H=(\xi+\Delta)/\Delta$, $\tau=(k^2\tau+\Delta)/\Delta^2$, $k_0=\gamma WRT/(P_K-P_P)$ – тиск, координата, товщина сухої зони, час, число Косовича відповідно; Δ – ефективна товщина ізоляції, $\mathbf{P_C}$ –

парціальний тиск водяної пари, $J = \dfrac{\Delta^2 e a_m \delta S}{k^2 \left(P_c - P_k\right) c}$ – безрозмірна величина тепловиділення.

Щодо нової функції $\varphi(y,\tau) = \psi(y,\tau) - 1 - \psi_P(y - H)$ крайова задача (18) – (20) приймає вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varphi_P, \quad \tau > 1, \quad 1 < y < H(\tau), \tag{21}$$

$$\varphi(y,1) = \psi_P(H - y), \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=1} = \psi(\tau, H) = 0, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=H} + \psi_P = k_0^{'} \frac{dH}{d\tau}, \quad H(1) \neq 1. \tag{24}$$

Як і першому випадку, поля парціальних тисків визначимо у виді:

$$\psi(\tau, y) = 1 - \psi_P(\tau, y)(y - H) + \frac{2}{H(\tau) - 1} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\tau) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2(H(\tau)-1)}(y - 1), \tag{25}$$

де $\mathbf{U_n(\tau)}$ і $\mathbf{H(\tau)}$ є рішеннями задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку наступного виду:

$$\frac{dU_n}{d\tau} + \left[\frac{\pi(2n-1)}{2(H-1)}\right]^2 U_n = \frac{H}{2(n-1)} \sum \Omega_{nm} U_m - \frac{2\psi_p H(n-1)}{\pi(2n-1)},$$

$$k_0 \frac{dH}{d\tau} = \frac{\pi}{(H-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)(-1)^n U_n(\tau), \tag{26}$$

$$H(1) = H_0,$$

$$U_n(0) = \frac{4\psi_P \left[H_0 - 1\right]^2 \left[1 + \pi(2n-1)\right]}{\pi^2 (2n-1)^2}, \tag{27}$$

$$\Omega_{nm} = \frac{(-1)^{n+m+1}(2n-1)(2m-1)}{(m+n-1)(m-n)}, \quad n \neq m; \quad \Omega_{nm} = 1, \quad n = m.$$

Вираження для інтенсивності утворення сухої зони має вигляд:

$$J = \frac{k^2}{RT}\left[\frac{\pi(P_P - P_K)\Delta}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) U_n \left(\frac{k^2 \tau + \Delta^2}{\Delta^2}\right) + \frac{P_P - P_K}{\Delta}\right]. \tag{28}$$

Висновки. У роботі побудована математична модель мікрохвильового сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів. Вирішено задачу для двох випадків, що представляють практичний інтерес у визначенні парціального тиску водяної пари: коли можна зневажити дифузійним опором між поверхнею твердих фракцій і парогазовим середовищем і коли це зробити не можна при постійній потужності внутрішнього джерела тепла.

 ISSN 1562-9945

ЛІТЕРАТУРА

1. Архангельский Ю.С., Девяткин И.И. Сверхвысокочастотные нагревательные установки для интенсификации технологических процессов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – 140 с.
2. Явчуновский В.Я. Микроволновая и комбинированная сушка. Физические основы технологии и оборудования. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та , 1992. – 233 с.
3. Архангельский Ю.С., Тригорлый С.В. СВЧ электротермические установки лучевого типа. Саратов: Изд-во. Сарат. гос. техн. ун-та, 2000. – 122с.
4. Торговников Г.И. О перспективах использования СВЧ энергии для обработки древесины и древесных материалов // Деревообрабатывающая промышленность. – 1989. – №5. – С. 13 – 16.
5. Афанасьев А.М., Подгорный В.В., Сипливый К.Н., Яцышен В.В. Математическое моделирование взаимодействия СВЧ излучения с влагосодержащими плоскими слоистыми средами // ИВУЗ «Электромеханика». – 2001. – №2. – С. 14 – 21.
6. Лыков А.В. Теплообмен. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
7. Яковенко В.О. Моделювання процесу надвисокочастотного сушіння пористих діелектричних матеріалів // Вісник АМСУ. – 2007. – № 2 (34). – С. 107 – 111.
8. Яковенко В.О. Моделювання теплових процесів при спалюванні вуглю під дією енергії надвисоких частот // Системні технології, системне моделювання технологічних процесів. – 2007. – № 5 (52). – С. 65 – 71.