УДК 517.272:97

В.А. Максимюк

ПРО ПОСЛІДОВНЕ ВИКЛЮЧЕННЯ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Вступ. Метод невизначених множників Лагранжа є ефективним засобом постановки й розв’язування математичних задач на умовний екстремум. Він використовується для формулювання варіаційних принципів та побудови функціоналів з додатковими умовами, зокрема в теорії оболонок [1,2]. Метод є доцільним, коли додатковими умовами прямо скористатись неможливо або небажано. Подібне може виникнути при розв’язуванні задач на умовний екстремум чисельними методами, навіть, якщо додаткові умови задані явно. Явна ж форма додаткових умов дозволяє зразу аналітично визначити множники Лагранжа й виключити їх та звести задачу до знаходження абсолютного екстремуму без збільшення кількості рівнянь, що є доцільним з погляду чисельних методів. Класичний варіант [3] виключення кількох множників Лагранжа в деяких випадках наштовхується на труднощі. Покажемо це на простому алгебраїчному прикладі.

Суть проблеми. Нехай потрібно знайти екстремум функції

$$u = u(x, y, z) \tag{1}$$

при додаткових умовах

$$y = y(x), \; z = z(x). \tag{2}$$

Відзначимо, що явна підстановка додаткових умов (2) в (1) дає рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z' = 0 \tag{3}$$

для координати x точки екстремуму (x, y, z), інші координати випливають з (2).

Введемо згідно з [3] допоміжну функцію

$$v(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = u(x, y, z) + \lambda_1 [y - y(x)] + \lambda_2 [z - z(x)]. \tag{4}$$

Зразу ж з необхідних умов екстремуму $\partial v / \partial y = \partial v / \partial z = 0$ знайдемо множники

$$\lambda_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}; \; \lambda_2 = -\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{5}$$

підставимо їх у (4) і отримаємо нову функцію від трьох змінних

© МАКСИМЮК В.А., 2008

$$w(x,y,z)=u(x,y,z)-\frac{\partial u}{\partial y}\left[y-y(x)\right]-\frac{\partial u}{\partial z}\left[z-z(x)\right]. \qquad (6)$$

Таку процедуру називатимемо паралельним виключенням множників Лагранжа.

Застосуємо до функції (6) необхідні умови абсолютного екстремуму

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\left[y-y(x)\right]+\frac{\partial u}{\partial y}y'-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left[z-z(x)\right]+\frac{\partial u}{\partial z}z'=0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[y-y(x)\right]-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\left[z-z(x)\right]=0; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left[y-y(x)\right]-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left[z-z(x)\right]=0.$$

Останні два рівняння утворюють замкнену систему, однозначним розв’язком якої є додаткові умови (2) при умові, що визначник цієї системи відмінний від нуля:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\neq 0. \qquad (8)$$

Тоді рівняння (7) еквівалентні рівнянням (2) і (3), а абсолютний екстремум функції (6) збігається з умовним екстремумом задачі (1-2). Проте умови типу (8) обмежують область застосування паралельного виключення множників Лагранжа, наприклад, для широкого класу функцій виду $u=u(x+y+z)$.

Альтернативний підхід. Перейдемо до викладу пропонованої процедури послідовного виключення множників Лагранжа. З умови $\partial v/\partial y=0$ знайдемо перший множник λ_1. Звичайно, він буде такий, як у (5). Підставимо його у (4), тоді

$$v_1(x,y,z,\lambda_2)=u(x,y,z)-\frac{\partial u}{\partial y}\left[y-y(x)\right]+\lambda_2\left[z-z(x)\right]. \qquad (9)$$

З умови $\partial v_1/\partial z=0$ знайдемо другий множник

$$\lambda_2=-\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left[y-y(x)\right],$$

який вже відрізняється від множника у (5). Підставимо λ_2 їх у (9) і отримаємо нову, відмінну від (6) функцію від трьох змінних

$$w(x,y,z)=u(x,y,z)-\frac{\partial u}{\partial y}\left[y-y(x)\right]-\frac{\partial u}{\partial z}\left[z-z(x)\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left[y-y(x)\right]\left[z-z(x)\right]. \qquad (10)$$

 ISSN 1562-9945

Застосувавши до функції (10) необхідні умови абсолютного екстремуму, отримаємо систему трьох рівнянь, з яких два останні зводяться до таких

$$[y - y(x)]\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}[z - z(x)] - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} = 0;$$

$$[z - z(x)]\left\{\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2}[y - y(x)] - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} = 0, \qquad (11)$$

що мають однозначний розв'язок (2) і разом з першим рівнянням є еквівалентними рівнянням (2) і (3), а абсолютний екстремум функції (10) збігається з умовним екстремумом задачі (1-2).

Звичайно, послідовне виключення теж має обмеження. Наприклад, нехай $\partial^2 u / \partial y^2 \neq 0$, а $\partial^2 u / \partial z^2 = 0$, тоді друге рівняння в (11) перетворюється в тотожність. Тим самим нехтується друга додаткова умова в (2). Проте таке обмеження в порівнянні з (8) стосується значно вужчого класу функцій, в даному прикладі – лінійних по z функцій.

Зауважимо, що послідовне виключення можна виконати шляхом почергового введення однієї додаткової умови за допомогою одного множника з подальшим його виключенням і введенням наступної додаткової умови. У наведеному випадку простих додаткових умов (2) процедура виключення практично не зміниться, проте у випадку складніших додаткових умов вона може значно спростити постановку й розв'язання задач на умовний екстремум.

Висновок. Запропонована процедура послідовного виключення множників Лагранжа може бути поширена для побудови функціоналів і знаходження екстремалей з додатковими умовами або додатковими незалежними функціями. Приклад такого застосування можна знайти в задачах [2] теорії оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. –542с.
2. Максимюк В.А. Про застосування методу множників Лагранжа в задачах статики композитних оболонок // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С.75–79.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики.– М.: Наука, 1974.–Т.1.– 480 с.

Получено 18.03.2008 г.