

УДК 517.5

М.О. Шульга

ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ДЕЯКИХ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В задачах механіки зустрічаються з необхідністю оперувати з не всюди диференційованими негладкими періодичними функціями чи їх похідними, ряди Фур’є яких є умовно збіжними або і зовсім розбіжними (прямокутний “синус”, пилкоподібна ламана та ін.), що може бути обумовлено односторонніми в’язями, здатністю сприймати деформацію тільки одного знаку та ін. В монографії [1] для пилкоподібних ламаних розвивається техніка опису, що базується на їх геометричній інтерпретації, названій автором ромбічними функціями ($sir\sigma$, $cor\sigma$ та ін.).

В написаній мною короткій передмові до [1] твердження, що “ромбічні функції задовольняють деякому звичайному диференціальному рівнянню другого порядку” (с. 7, [1]), є не зовсім точним. Це впливає з наступного.

Звернемось до рис.1. На ньому використані позначення: дуга

$$\cup b_0c_1 = s_R, \quad s = \frac{s_R}{R}, \quad \sin s = \frac{C_1c_1}{R}, \quad \cos s = \frac{C_1O}{R}; \quad \text{пряма} \quad b_0a_1 = \sigma_R,$$

$$sir\sigma = \frac{A_1a_1}{R} = \frac{\sigma_R \sin \pi/4}{R} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad cor\sigma = \frac{A_1O}{R} = \frac{R - \sigma_R \cos \pi/4}{R} = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}; \quad \text{в другому}$$

квадранті ламана $b_0a_1b_1a_2 = \sigma_R$, $sir\sigma = 2 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $cor\sigma = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ і т.д.

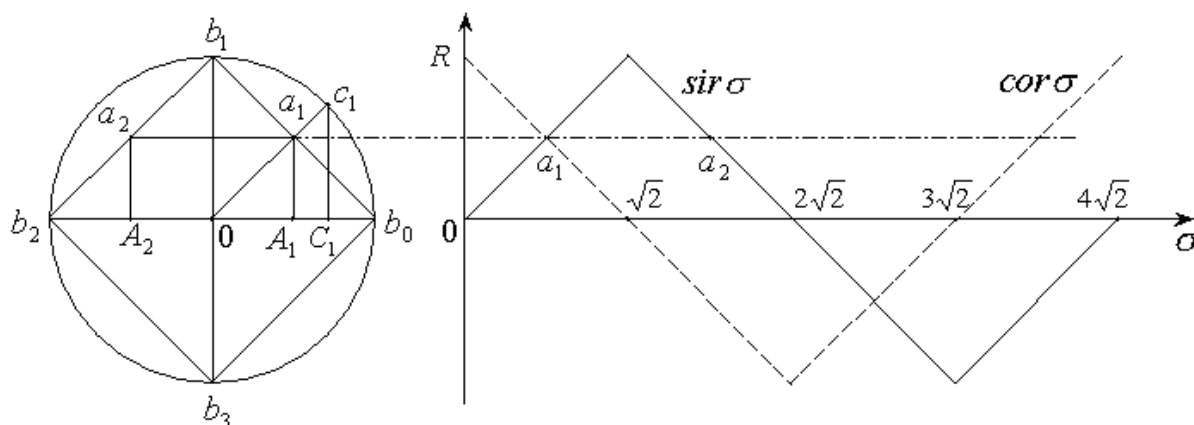


Рисунок 1

По рис.1 можна встановити, що функція $y = \text{sir}\sigma$ визначається формулами

$$y = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - 4n, & -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + 4n + 2, & \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{cases} \quad (1)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Тоді диференціальні рівняння для функції $y = \text{sir}\sigma$ будуть

$$\begin{aligned} \sigma y' - y &= 4n, & -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \sigma y' - y &= -4n - 2, & \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{aligned} \quad (2)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (верхній (нижній) рядки (2) відповідають верхньому (нижньому) рядкам (1)) або $y''(\sigma) = 0$ при $\sigma \neq -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

З того ж рис.1 видно, що функція $z = \text{cor}\sigma$ визначається формулами

$$z = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + 4n + 1, & 4\sqrt{2}n < \sigma < 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - 4n - 3, & 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{cases} \quad (3)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В цьому разі диференціальні рівняння для функції (3) будуть

$$\begin{aligned} \sigma z' - z &= -4n - 1, & 4\sqrt{2}n < \sigma < 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \sigma z' - z &= 4n + 3, & 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{aligned} \quad (4)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (верхній (нижній) рядки (4) відповідають верхньому (нижньому) рядкам (3)) або $z''(\sigma) = 0$ при $\sigma \neq 2\sqrt{2}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Зауважимо також, що перші похідні $y'(\sigma)$ та $z'(\sigma)$ є сталими, крім точок їх розриву $\sigma = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}n$ (для $y'(\sigma)$) і $\sigma = 2\sqrt{2}n$ (для $z'(\sigma)$) $n = 0, \pm 1, \dots$. Другі похідні $y''(\sigma)$, $z''(\sigma)$ дорівнюють нулеві, крім точок в яких вони не визначені.

Між тригонометричними функціями $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ (α – довжина дуги кола одиничного радіусу, яку замітає рухомий радіус) та функціями $\text{sir}\sigma$, $\text{cor}\sigma$ (σ – довжина периметру вписаного в одиничне коло ромба (квадрату), який замітає рухомий радіус) справедливі також залежності:

в першому квадранті

$$\operatorname{sir}\sigma = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \operatorname{cor}\sigma = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad (5)$$

в другому квадранті

$$\operatorname{sir}\sigma = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}, \quad \operatorname{cor}\sigma = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad (6)$$

в третьому квадранті

$$\operatorname{sir}\sigma = \frac{\sin \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha}, \quad \operatorname{cor}\sigma = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad (7)$$

в четвертому квадранті

$$\operatorname{sir}\sigma = \frac{\sin \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \operatorname{cor}\sigma = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (8)$$

В цей же час залежність $\operatorname{tgr}\sigma = \operatorname{tg}\alpha$ справедлива [1] при довільних значеннях аргументу. Враховуючи знаки тригонометричних функцій в різних квадрантах, ці формули можна записати [1] у справедливому для всіх квадрантів вигляді

$$\operatorname{sir}\sigma = \frac{\sin \alpha}{|\sin \alpha| + |\cos \alpha|}, \quad \operatorname{cor}\sigma = \frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha| + |\cos \alpha|}. \quad (9)$$

Періодичні з періодом $T = 4\sqrt{2}$ функції $y = \operatorname{sir}\sigma$ і $z = \operatorname{cor}\sigma$ розкладаються в ряди Фур'є

$$y = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T}, \quad (10)$$

$$z = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T}. \quad (11)$$

Графіки функції (11) та її похідної

$$z' = -\frac{16}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T} \quad (12)$$

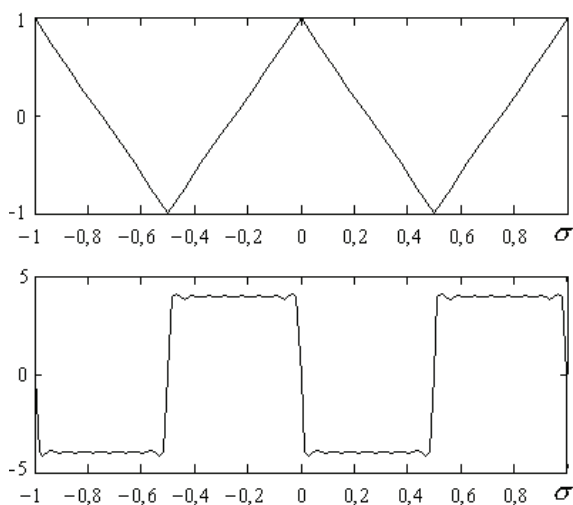


Рисунок 2

побудовані чисельно і показані на рис.2. Ряд (10) є абсолютно збіжним і для нього обґрунтоване застосування гармонічного аналізу, а ряд (12) може бути тільки умовно збіжним.

Друга формальна похідна ряду (11)

$$z'' = -\frac{32}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T} \quad (13)$$

є розбіжним рядом, тоді як за означенням (3) друга похідна $z''(\sigma)$ дорівнює нулеві крім точок її невизначеності.

Графіки функції (10) та її похідної будуть зсунуті по вісі σ на чверть періоду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Плахтієнко М.П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – К.: ЗНДІЕП, 2005. – 136 с.

Получено 13.05.2008 г.