УДК 539.3

П.А.Стеблянко

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ

Введение. Предложен ориентированный на использование метода покомпонентного расщепления вариант математической модели количественного описания термомеханических процессов в электропроводных телах, находящихся под воздействием квазиустановившихся электромагнитных полей, с учетом температурной зависимости свойств материалов, упруго-пластического характера деформирования и нелинейности зависимостей индукций электрического и магнитного полей от соответствующих напряженностей и температуры. Модель основана на теории взаимодействия электромагнитного поля и материального континуума, уравнениях Максвелла для термочувствительных намагничивающихся и поляризующихся тел, зависимостях теории теплопроводности и неизотермической термоупругопластичности. Влияние поля учтено через объемные тепловыделения, пондеромоторные силы и моменты.

Постановка задачи. Электромагнитное поле электропроводного тела и внешней среды описывает система уравнений Максвелла [1-3].

Для области тела

$$\vec{\nabla}\times H = \frac{\partial D}{\partial t} + j\,, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}\,, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot D = \Omega \quad , \quad r \in V \tag{3}$$

и внешней среды

$$\vec{\nabla}\times H^0 = \frac{\partial D^0}{\partial t} + j^0\,, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla}\times E^0 = -\frac{\partial B^0}{\partial t}\,, \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot D^0 = \Omega^0\ ,\ \ r \in E^3/V,\ \ \ t \in [0\ ,\ \tau_*]. \tag{6}$$

Уравнение теплопроводности можно записать так

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}\,T\right)+W\,. \qquad (7)$$

Здесь $T-$ температура; $c=c(T)$ – объемная теплоемкость; $\lambda=\lambda(T)-$ коэффициент теплопроводности; W – мощность источников тепла; $H\,,E$ – векторы напряженностей магнитного и электрического полей; $B\,,D$ – магнитная и электрическая индукции; $j-$ плотность токов; Ω – объемная плотность электрических зарядов; j^0 і Ω^0 – заданые функции координат и времени; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамильтона; $r-$ радиус-вектор точки; $\left(\vec{\nabla}\times\right)$, $\left(\vec{\nabla}\cdot\right)$ обозначают соответственно операции ротора и дивергенции.

Основной задачей нестационарной теории термоупругопластичности является определение перемещений (скоростей перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в пространственном теле в процессе его нагружении , когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения, в том числе и при помощи електромагнитных фокторов, будем рассматривать развивающимся во времени. Механические характеристики материала задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов.

Исходя из перечисленного, необходимо определить двенадцать составляющих електромагнитного поля, температуру, три составляющие вектора скорости перемещений, шесть компонент тензора напряжений и шесть компонент тензора деформаций. Следовательно, подлежат определению 28 неизвестных функций времени и трех координат. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла, уравнением теплопроводности, уравнениями движения, геометрическими и физическими уравнениями [3,5,9]. При решении нестационарной задачи теории пластичности в тех частях тела, где возникают необратимые деформации, будем пользоваться определяющими уравнениями, описывающими процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизны.

Полная система уравнений в частных производных решается при определенных начальных и граничных условиях.

 ISSN 1562-9945

Метод решения. Приведем полную систему уравнений к виду

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} A_{1i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^{3} A_{2i} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_i^2} + \vec{C}\,, \tag{8}$$

где $\vec{W}$ - вектор, компонентами которого будут:

- составляющие векторов напряженностей магнитного и электрического полей ($w_{01}=H_1$; $w_{02}=H_2$; $w_{03}=H_3$; $w_{04}=E_1$; $w_{05}=E_2$; $w_{06}=E_3$.);

- составляющие векторов магнитной и электрической индукции ($w_{07}=B_1$; $w_{08}=B_2$; $w_{09}=B_3$; $w_{10}=D_1$; $w_{11}=D_2$; $w_{12}=D_3$);

- температура ($w_{13}= T$);

- скорости перемещений ($w_{14}=v_1$; $w_{15}=v_2$; $w_{16}=v_3$.);

- составляющие тензоров напряжений и деформаций ($w_{17}=\sigma_{11}$; $w_{18}=\sigma_{22}$; $w_{19}=\sigma_{33}$; $w_{20}=\tau_{12}$; $w_{21}=\tau_{13}$; $w_{22}=\tau_{23}$; $w_{23}=\varepsilon_{11}$; $w_{24}=\varepsilon_{22}$; $w_{25}=\varepsilon_{33}$; $w_{26}=\varepsilon_{12}$; $w_{27}=\varepsilon_{13}$; $w_{28}=\varepsilon_{23}$.).

Для решения векторного уравнения (8) используем метод покомпонентного расщепления [4, 5]. Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r с учетом дробного шага.

$$\omega_r = \left\{ \begin{matrix} t_p;\, t_{p+1/3} = t_p + \tau_1;\, t_{p+2/3} = t_{p+1/3} + \tau_2;\, t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3;\, t_0 = 0;\, p = 0,1,2,... \end{matrix} \right\} \tag{9}$$

Схема расщепления векторного уравнения (8) Писмана, Рэчфорда, Дугласа может быть представлена так [6-8].

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[A_{11}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_1} + A_{21}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_1^2} + A_{12}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_2} + A_{22}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_2^2} \right] + \gamma_1 \vec{C}, \qquad t \in \left[t_p; t_{p+1/3}\right],$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[A_{12}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_2} + A_{22}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_2^2} + A_{13}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_3} + A_{23}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_3^2} \right] + \gamma_2 \vec{C}, \qquad t \in \left[t_{p+1/3}; t_{p+2/3}\right],$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[A_{13}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_3} + A_{23}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_3^2} + A_{11}\frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_1} + A_{21}\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_1^2} \right] + \gamma_3 \vec{C}, \qquad t \in \left[t_{p+2/3}; t_{p+1}\right] \tag{10}$$

Здесь и далее $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Решение расщепленной системы (10) будем определять при помощи следующего интерполяционного выражения

$$\vec{W}(x, y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{W}_{ij} \cdot F_{ij}(x; y). \tag{11}$$

Здесь $x = \alpha_1,\, y = \alpha_2$ - на первом дробном шаге по времени, $x = \alpha_2,\, y = \alpha_3$ - на втором дробном шаге по времени и $x = \alpha_3,\, y = \alpha_1$ - на третьем дробном шаге по времени. Через $\vec{W}_{ij}$ обозначены значения искомых функций в узлах координатной сетки. Выражения для функций $F_{ij}(x;y)$ приведены в работах [6-8] как для случая использования интерполяционных сплайнов третьей степени по каждой из координат, так и для случая применения напряженных сплайнов.

Частные производные первого и второго порядков по координатам на каждом дробном шаге интегрирования по времени определяются на основании выражения для двухмерного сплайна Тогда для дифференциальных операторов, входящих в состав векторных уравнений (10) можно записать такие выражения

$$\frac{\lambda_1(\vec{W})}{h_1} \equiv \frac{\partial \vec{W}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{W}_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x;y)}{\partial x},$$

$$\frac{\lambda_2(\vec{W})}{h_2} \equiv \frac{\partial \vec{W}(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{W}_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x;y)}{\partial y},$$

$$\frac{\mu_1(\vec{W})}{h_1^2} \equiv \frac{\partial^2 \vec{W}(x,y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{W}_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x;y)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu_2(\vec{W})}{h_2^2} \equiv \frac{\partial^2 \vec{W}(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \vec{W}_{ij} \cdot \frac{\partial^2 F_{ij}(x;y)}{\partial y^2} \tag{12}$$

Отметим, что по аналогии с результатами работы [5], формулы (12) позволяют вычислять частные производные по координатам первого и второго порядка в областях расположенных непосредственно на границе тела $x \in [x_0;x_1], y \in [y_0;y_1], x \in [x_{N-1};x_N], y \in [y_{M-1};y_M]$ и соседних с ними областях $x \in [x_1;x_2], y \in [y_1;y_2], x \in [x_{N-2};x_{N-1}], y \in [y_{M-2};y_{M-1}]$. Во всех остальных ячейках пространственной сетки для этой цели нужно пользоваться линейной комбинацией (полу суммой) соответствующих выражений из (12), записанных в соседних областях.

Рекуррентные формулы явной схемы метода расщепления для определения неизвестных величин можно записать так

$$(W_m)_k^{p+1/3} = (W_m)_k^p + \frac{\tau}{2}\left(A_{11}\frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{21}\frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{12}\frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{22}\frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2}\right)_{k-1}^{p+1/3} + \tau\gamma_1 C_m^p,$$

$$(W_m)_k^{p+2/3} = (W_m)_k^{p+1/3} + \frac{\tau}{2}\left(A_{12}\frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{22}\frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{13}\frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{23}\frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2}\right)_{k-1}^{p+2/3} + \tau\gamma_2 C_m^{p+1/3},$$

$$(W_m)_k^{p+1} = (W_m)_k^{p+2/3} + \frac{\tau}{2}\left(A_{13}\frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{23}\frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{11}\frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{21}\frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2}\right)_{k-1}^{p+1} + \tau\gamma_3 C_m^{p+2/3},$$

Они позволяют получить соответственно третий порядок аппроксимации метода по координатам [6].

 ISSN 1562-9945

Выводы. Разработан с использованием метода покомпонентного расщепления и представления всех искомых величин в виде двухмерных сплайнов разностный алгоритм, который описывает электромагнитные, тепловые и механические процессы. Получены оценки границ применимости предложенного метода определения электромагнитного, температурного и механического полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.** Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл // Мат. методи та фізико-механічні поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 140-148.
2. **Дробенко Б.Д.** Термонапряженное состояние электропроводных тел при воздействии внешнего квазиустановившегося электромагнитного поля // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 13-25.
3. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля. – Москва: Наука, 1964. – 460 с.
4. **Марчук Г. И.** Методы расщепления. – Москва: Наука, 1988. – 263 с.
5. **Стеблянко П.А.** Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
6. **Стеблянко П.А.** Анализ вычислительной эффективности приближенных методов при исследовании нестационарного напряженно-деформированного состояния тел с использованием двухмерных сплайнов //Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць/ ДНУ.- Дніпропетровськ, 2005.- Вип. 7.- С 73-87.
7. **Стеблянко П.А.** Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -107-111.
8. **Стеблянко П.О.** Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 5 (46) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -17-26.
9. **Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г.** Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2.Термовязкопластичность.–Киев:Наукова думка,1987.–264с.

Получено 04.05.2008 г.