УДК 517.5

Т.В. Крылова

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Введение. Исследование колебаний динамических систем приводят к задачам на собственные значения. В ряде случаев эти задачи являются нелинейными относительно параметра.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным вхождением параметра

$$y^{IV}(x) + f_1(\lambda)\rho(x)y''(x) + f_2(\lambda)q(x)y(x) = 0\,, \quad x \in (0;1) \qquad \textbf{(1)}$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

$$\rho(x), q(x) \in C_{[0;1]}.$$

Метод решения. Отыскание собственных значений λ будем проводить в три этапа.

На первом этапе определим область расположения собственных значений. Для этого используем интегральное представление [1]

$$y(x) = \int_0^1 M_x(t) y^{IV}(t)dt,$$

где

$$M_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} \quad (1-x)^2(\; -(2x+1) \quad t^3 + 3 \qquad t^2 - x), \; t \in [\;0;\; x], \\ \frac{1}{6}(t-x)^3 - \frac{1}{6} \quad t^3(1-x)^2(2x+1) + \frac{1}{2} \quad t^2 \quad x \; (1-x)^2, \; t \in [\; x;\; 1]. \end{cases}$$

В результате получим, что собственные значения λ задачи **(1)**, **(2)** находятся в области

$$A(f_1(\lambda))^2 + Bf_1(\lambda)f_2(\lambda) + C(f_2(\lambda))^2 \geq 1, \qquad \textbf{(3)}$$

где

$$A = -\frac{11}{2100} \max_{x \in [0;1]} \quad \rho^2(x),$$

$$B = -\frac{1}{9450} \max_{x \in [0;1]} \quad (\rho(x) \cdot q(x)),$$

$$C = \frac{71}{1746300} \max_{x \in [0;1]} \quad q^2(x).$$

На втором этапе для определения собственных значений приближенное решение $\overline{y}(x)$ задачи (1), (2) для разбиения

$$\Delta_N = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = 1\}$$

будем искать в виде полиномиального сплайна пятой степени

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i + \sum_{j=0}^{N-1} b_j (x - x_j)_+^5 .$$

Для нахождения N+5 неизвестных коэффициентов a_i (i=0,1,2, 3,4), b_j (j=0,1,2,...,N-1) используем краевые условия (2) и осуществим коллокацию в N+1 точках отрезка [0;1]. В качестве точек коллокации можно выбрать внутренние узлы $x_к$, к=1,2,..., N-1 сплайна и точки $x_0 + \varepsilon$, $x_N - \varepsilon$.

Приравниваем нулю определитель полученной системы N+5 алгебраических линейных однородных уравнений относительно N+5 неизвестных коэффициентов a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4), b_j (j = 0, 1, 2, ..., N-1), получим уравнение относительно приближенных значений $\overline{\lambda}$. Далее проверяем, какие из $\overline{\lambda}$ находятся в области (3).

На третьем этапе для уточнения найденных значений $\overline{\lambda}$ из области (3), вычисляем для какого-нибудь значения $\overline{\lambda}_k$ (например, наименьшего положительного значения) соответствующие коэффициенты a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4), b_j (j = 0, 1, 2, ..., N-1). Потом строим более тонкую сетку

$\Delta_n^* = \{ \ 0 = x_0^* < x_1^* < ... < x_n^* = 1 \ \}$, причем n>>$N$.

Асимптотически оптимальные узлы $x_к^*$, к = 0, 1, ..., n определяем из равенств [2,3]

$$\int_0^{x_k^*} \sqrt[6]{\left| \ \overline{y}^{VI}(x) \ \right|} \quad dx = \frac{k}{n} \int_0^1 \sqrt[6]{\left| \ \overline{y}^{\ VI}(x) \ \right|} dx, \ k = 0 \ , 1, \ 2, \ \dots, \ n,$$

где $$\overline{y}^{IV}(x_j) = \frac{\overline{y}^{IV}(x_{j-1}) - 2\overline{y}^{IV}(x_j) + \overline{y}^{IV}(x_{j+1})}{h_j^2}, \ j = 1, \ 2, \ ..., \ N - 1.$$

На тех участках, где $\overline{y}''(x) \cdot \overline{y}^{IV}(x) < 0,$ приближенное решение $\widetilde{y}(x)$ задачи (1), (2) представляем в виде интерполяционного тригонометрического сплайна, а на тех участках где $\overline{y}''(x) \cdot \overline{y}^{IV}(x) > 0$ - в виде интерполяционного напряженного сплайна [4,5,6]

 ISSN 1562-9945

$$\widetilde{y}(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k (x - x_{k-1}^*)_+ + B_k (x_k^* - x)_+ + C_k \varphi_k(x) + D_k \psi_k(x))$$

(для тригонометрического сплайна

$$\varphi_k(x) = \cos \gamma_k (x - t_k)_+,$$

$$\psi_k(x) = \sin \gamma_k (x - t_k)_+,$$

для напряженного сплайна

$$\varphi_k(x) = ch\Theta_k (x - t_k)_+,$$

$$\psi_k(x) = sh\Theta_k (x - t_k)_+,$$

где

$$\gamma_k = \sqrt{-\frac{\overline{y}^{IV}(t_k)}{\overline{y}''(t_k)}},$$

$$\Theta_k = \sqrt{\frac{\overline{y}^{IV}(t_k)}{\overline{y}''(t_k)}},$$

$$t_k = \frac{x_{k-1}^* + x_k^*}{2}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Для отыскания 4n+1 неизвестных коэффициентов A_0, $A_к$, $B_к$, $C_к$, $D_к$, к = 1, 2, ...,n, как и на втором этапе, используем краевые условия (2) и коллокацию в 4n-1 внутренних точках отрезка [0;1]. В результате получим уточненные приближенные собственные значения $\overline{\overline{\lambda}}$ задачи (1), (2), находящиеся в области (3).

Если $\left|\overline{\lambda} - \overline{\overline{\lambda}}\right|$ больше допустимой точности вычислений, то процесс уточнения значений λ можно повторить.

Вывод. Метод применим и для решения краевых задач с непрерывно-дискретными коэффициентами уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылова Т.В., Лигун А.А. Области изменения собственных значений многопараметрических и нелинейных краевых задач // Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун - та. – 1990. – С. 38 - 44.
2. Крылова Т.В., Лигун А.А. О выборе узлов при приближенном решении краевых задач методом сплайн - коллокации // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т.20, № 9. – С. 1529 - 1534.
3. Крылова Т.В. Начала математического моделирования. К: Выща школа, 1998.- ч.2. – 177 с.
4. Крылова Т.В. Применение тригонометрических сплайнов для приближенного решения краевых задач // Матеріали VI міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – К.: «Віпол». – 1997. – С. 228.
5. Крылова Т.В. Приближенное решение краевой задачи с помощью напряженных сплайнов // Тез. докл. междунар. конф. «Modelling and

investigation of systems stability. Systems Investigation». – К.: ІБЦ Мінстату України. – 1997. – С. 60.

6. Krylova T. Non-linear eigenvalues of boundary problem for differential equation of six order // 77th Annual Meeting GAMM 2006, Berlin, Germany, 2006. – P. 487 – 488.

Получено 04.05.2008 г.

 ISSN 1562-9945