В.Г.Савченко

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНО ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Одной из важнейших особенностей композитных материалов является существенная анизотропия механических свойств и, как следствие, с одной стороны возможность управление этой анизотропии в процессе изготовления конструкции, а с другой – появление дополнительной возможности при проектировании. Наряду с анизотропией композитные материалы также обладают разномодульностью, т.е. при растягивающих или сжимающих нагрузках их механические характеристики различные [1]. Поэтому для оценки прочности рассматриваемой конструкции необходимо в расчетах учитывать не толька анизотропию механических свойств материала, но и различие прочностных характеристик материала при растяжении и при сжатии.

В отличие от ранее опубликованых работ [2-5], в которых приведены результаты исследования напряженного состояния составных тел вращения из прямолинейно ортотропных материалов без учета их разномодульности, ниже будет изложена конечно-элементная методика исследования термонапряженного состояния тел вращения, изготовленных из разномодульных на растяжение и сжатие упругих прямолинейно ортотропных материалов, при неосесимметричном нагружении и нагреве. При исследовании напряженного состояния элементов из композитных материалов будем пренебрегать их гетерогенной структурой и воспользуемся соотношениями анизотропной теории упругости.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат z, r, φ состояние тела вращения произвольного мередионального сечения из упругого прямолинейно ортотропного материала при нагружении объемными $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$ силами и неравномерном нагреве. В качестве ортотропных материалов рассмотрим упруго деформирующиеся материалы, в которых главные оси анизотропии теплофизических и механических характеристик совпадают с направлениями осей декартовой системы координат, одна из осей анизотропии совпадает с осью вращения тела.

Для такого ортотропного материала, в котором главные оси анизотропии механических и теплофизических характеристик материала совпадает с направлениями осей декартовой системы координат z,x,y, связь между компонентами деформаций и напряжений можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T \\ \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^T \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_z} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{xx} \\ \ldots\ldots \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}. \qquad (1)$$

где E_i - модуль упругости в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с выбранной системой координат; G_{ij} – модуль сдвига в соответствующей координатной плоскости; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующей сжатие элемента в направлении оси j при растяжении его в направлении оси i; $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ii}^T (T - T_0)$, α_{ii}^T – коэффициент линейного теплового расширения материала вдоль соответствующего главного направления анизотропии.

В случае анизотропного материала с механическими характеристиками, одинаковыми при растяжении и сжатии, из условия существования положительно определенной функции потенциальной энергии следует, что матрица податливостей в соотношениях (1) является симметричной. Для разномодульного материала условия между коэффициентами Пуассона, модулями Юнга и модулями сдвига не выполняются, поэтому матрица податливостей остается несимметричной. Достичь симметричности матрицы податливостей можно путем задания определенных соотношений между постоянными материалами при растяжении и сжатии, которые бы позволяли удовлетворить известным преобразованиям теории упругости анизотропного тела. Однако введение этих соотношений между свойствами материалами при сжатии и

 ISSN 1562-9945

растяжении приводит к ограничению использования реальных технических материалов. Мы же будем пользоваться подходом, который заключается в сложении коэффициентов матрицы податливостей при растяжении и при сжатии пропорционально соответствующим сжимающим и растягивающим напряжением на соответствующих площадках. Это будет осуществляться путем введения некоторых весовых коэффициентов, учитывающих влияние знака соответствующих нормальных напряжений в двух перпенди-кулярных направлениях на соответствующие коэффициенты матрицы податливостей. Теоретического обоснования для такого подхода нет, но он позволяет сделать матрицу податливостей симметричной и воспользоваться при решении сформулированной задачи теорией упругости для анизотропного материала. При этом в зависимости от знака напряжений коэффициенты матрицы податливостей в (1) определяются следующим образом:

$$\text{если } \sigma_{zz} < 0\text{, то } \frac{1}{E_z} = \frac{1}{E_z^-}; \quad \text{если } \sigma_{zz} > 0\text{, то } \frac{1}{E_z} = \frac{1}{E_z^+},$$

……………………………….

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} > 0 \\ \sigma_{xx} > 0 \end{matrix}\text{, то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+}; \text{ если } \begin{matrix} \sigma_{zz} < 0 \\ \sigma_{xx} < 0 \end{matrix}\text{, то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-},$$

……………………………………. (2)

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} > 0 \\ \sigma_{xx} < 0 \end{matrix}\text{, то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{|\sigma_{zz}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|}\frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+} + \frac{|\sigma_{xx}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|}\frac{\nu_{xz}^-}{E_x^-},$$

$$\text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} < 0 \\ \sigma_{xx} > 0 \end{matrix}\text{, то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{|\sigma_{zz}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|}\frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-} + \frac{|\sigma_{xx}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|}\frac{\nu_{xz}^+}{E_x^+}$$

…………………………………………………………

$$\text{если } \sigma_{zx} > 0\text{, то } \frac{1}{G_{zx}} = \frac{1}{G_{zx}^+} = \frac{1}{E_{zx}^{45+}} - \left(\frac{1}{E_z^+} + \frac{1}{E_x^+} - \frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+}\right),$$

$$\text{если } \sigma_{zx} < 0\text{, то } \frac{1}{G_{zx}} = \frac{1}{G_{zx}^-} = \frac{1}{E_{zx}^{45-}} - \left(\frac{1}{E_z^-} + \frac{1}{E_x^-} - \frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-}\right).$$

…………………………………………………………..

Разрешив систему уравнений (1) относительно компонентов напряжений, получим выражения для напряжений через компоненты деформаций для прямолинейно ортотропных материалов в системе координат z,x,y. Если теперь в последнем случае перейти по известным формулам преобразования от декартовой системы координат к цилиндрической, связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T)\,. \tag{3}$$

Связь между компонентами напряжений и деформаций для ортотропного материала (3) представим в виде закона Гука для однородного материала. Для этого запишем коэффициенты A_{ijkl} в виде $A_{ijkl} = A_{ijkl}^0(1-\omega_{ijkl})$, где A_{ijkl}^0 – некоторые независимые от температуры осредненные значения соответствующих коэффициентов, а $A_{ijkl}^0\omega_{ijkl}$ – функции, характеризующие изменение A_{ijkl} и учитывающая их зависимость от температуры и разномодульность материала. Тогда связь между напряжениями и деформациями примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{zzzz}^0 & A_{zzrr}^0 & A_{zz\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zzrr}^0 & A_{rrrr}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zz\varphi\varphi}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{zrzr}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{z\varphi z\varphi}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r\varphi r\varphi}^0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{z\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_{zz}^* \\ \sigma_{rr}^* \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ \sigma_{zr}^* \\ \sigma_{z\varphi}^* \\ \sigma_{r\varphi}^* \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_{zzzz} = \Delta_{11}^*, \quad A_{zzr\varphi} = (\Delta_{13}^* - \Delta_{12}^*)\sin 2\varphi / 2,$$

$$\left.\begin{matrix} A_{zzrr} \\ A_{zz\varphi\varphi} \end{matrix}\right\} = \left[\Delta_{12}^* + \Delta_{13}^* \pm (\Delta_{12}^* - \Delta_{13}^*)\cos 2\varphi\right]/2,$$

$$\left.\begin{matrix} A_{rrrr} \\ A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \end{matrix}\right\} = \mathbf{[}(\,2\Delta_{22}^* + 3\Delta_{33}^* + 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) \pm 4(\Delta_{22}^* - \Delta_{33}^* \cos 2\varphi +$$

$$+ (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy})\cos 4\varphi]/8, \tag{5}$$

$$A_{rr\varphi\varphi} = [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* + 6\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy})\cos 4\varphi]/8$$

$$\left.\begin{matrix} A_{rrr\varphi} \\ A_{\varphi\varphi r\varphi} \end{matrix}\right\} = [2(\Delta_{33}^* - \Delta_{22}^*)\sin 2\varphi \pm (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy})\sin 4\varphi]/8,$$

$$\left.\begin{matrix} A_{zrzr} \\ A_{z\varphi z\varphi} \end{matrix}\right\} = [(G_{zx} + G_{zy}) \pm (G_{zx} - G_{zy})\cos 2\varphi]/2,$$

$$A_{zzzr} = A_{zzz\varphi} = \cdots = A_{zrzz} = A_{zrrr} = A_{zr\varphi\varphi} = A_{zrr\varphi} = \cdots = A_{r\varphi z\varphi} = 0;$$

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} \big/ \Delta, \ \Delta_{11} = \left(1\big/E_y - \nu_{xy}^2\big/E_x \right)\big/E_x, \ \Delta_{12} = \left(\nu_{zy}^2\, \nu_{xy}\big/E_x + \nu_{zx}\big/E_y \right)\big/E_z,$$

$$\Delta_{13} = \left(\nu_{zx}\nu_{xy} + \nu_{zy}\right)\big/(E_z E_x), \ \Delta_{22} = \left(1\big/E_y - \nu_{zy}^2\big/E_z \right)\big/E_z, \tag{6}$$

 ISSN 1562-9945

$$\Delta_{23} = \left(\nu_{zx} \frac{\nu_{zy}}{E_z} + \frac{\nu_{xy}}{E_x}\right) \Big/ E_z, \ \ \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z}\right) \Big/ E_z,$$

$$\Delta = (\Delta_{11} - \nu_{zx}\Delta_{12} - \nu_{zy}\Delta_{13}) \Big/ E_z;$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T \left(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0\right), \ (i, j = z, r, \varphi),$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{rr}^T \\ \alpha_{\varphi\varphi}^T\end{matrix}\right\} = (\alpha_{xx}^T + \alpha_{yy}^T)/2 \pm (\alpha_{xx}^T - \alpha_{yy}^T)\cos 2\varphi/2, \qquad (7)$$

$$\alpha_{r\varphi}^T = (\alpha_{yy}^T - \alpha_{xx}^T)\sin 2\varphi/2, \quad \alpha_{zr}^T = \alpha_{z\varphi}^T = 0;$$

$$\sigma_{zz}^* = A_{zztz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} -$$

$$-2A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^T) + A_{zzzz}\varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}\varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}^T,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 2A_{r\varphi r\varphi}\omega_{r\varphi r\varphi} + 2A_{r\varphi r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}^T - A_{zzr\varphi}(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) -$$

$$- A_{rrr\varphi}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) - A_{\varphi\varphi r\varphi}(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T).$$

В первом прибижении в соотношениях (5) члены с сомножателями в виде тригонометрических функций входят в (8) как $A_{ijkl}^0 \omega_{ijkl}$, а A_{ijkl}^0 в уравнениях состояния (4) - не изменяющаяся в окружном направлении часть (5).

Поскольку свойства материала зависят от напряженного состояния, и наоборот, задача определения напряженно-деформированного состояния является задачей с неизвестными механическими характеристиками. Однако от этой неопределенности можно избавиться, воспользовавшись следующей итерационной процедурой. Сначала перемещения и напряжения определяются в цилиндрической системе координат с первоначально заданными в декартовой системе координат свойствами (например, средними значениями коэффициентов Пуассона и модулей при растяжении и сжатии). Затем определяются в декартовой системе кординат соответствующие новые свойства материала с учетом знака напряжений, вычисленных на предыдущем шаге, и процесс вычислений повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность. При этом следует иметь в виду, что поскольку задача решается в цилиндрической системе переход к компонентам напряжений в декартовой системе кординат осуществляется по формулам:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr}\cos^2\varphi + \sigma_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi - \sigma_{r\varphi}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr}\sin^2\varphi + \sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi + \sigma_{r\varphi}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zr}\cos\varphi - \sigma_{z\varphi}\sin\varphi\,, \qquad (9)$$
$$\sigma_{zy} = \sigma_{zr}\sin\varphi + \sigma_{z\varphi}\cos\varphi\,,$$
$$\sigma_{xy} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\cos\varphi\sin\varphi - \sigma_{r\varphi}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,.$$

Методика построения решения неосесимметричной задачи термоупругости с использованием соответствующих вариационных уравнений и полуаналитического метода конечных элементов при записи определяющих уравнений в форме закона Гука (4) для однородного материала подробно описана в работах [4,5] и здесь не приводится.

Было исследовано напряженно-деформированное состояние седла клапана вдува ракетного двигателя как двухслойного тела вращения из изотропного неупруго деформирующегося материала и углерод-углеродного композитного материала при нагреве. Анализ результатов расчета показал, что учет разномодульности композита приводит к изменению напряжений до 15%. Таким образом, предложенная методика учета разномодульности прямолинейно ортотропного материала при исследовании напряженно-деформированного состояния составных тел вращения в процессе нестационарного нагрева приводит к уточнению результатов решения соответствующей краевой задачи термоупругопластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R.M. Stress – Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. -V.15, N 1. – PP.16-23.
2. Савченко В.Г. Термонапряженное состояние слоистых тел вращения из изотропных и прямолинейно ортотропных материалов Прикл. механика.- 1995.- т.31, №4.- С.3 - 9.
3. Савченко В.Г. О влиянии направления главных осей анизотропии прямолинейно ортотропных материалов на напряженное состояние составных тел вращения при неосесимметричном нагреве Прикл. механика.- 2003.- т.39, №6.- С.101-109.
4. Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко,..., В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. –448с.
5. Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N. Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading // Mech. Compos. Mater. -2004. – т. 40, №6. - P.473-488.

Получено 03.05.2008 г.