УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Н.В. Арнаута

# ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П’ЯТИШАРОВИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ВРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОСТІ РОЗМІЩЕННЯ РЕБЕР ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

**Вступ.** Нестаціонарні коливання неоднорідних по товщині оболонкових конструкцій розглядалися багатьма авторами. Зокрема, ґрунтовний огляд літератури з даного питання викладений в роботі [1]. Значний внесок в вивчені даної проблеми зробили автори монографії [2]. Нелінійні осесиметричні коливання тришарових оболонок обертання при імпульсних навантаженнях розглянуто в роботі [3], де розрахункова схема приймається з врахуванням незалежних кінематичних і статичних апроксимацій до кожного шару. Тришарові оболонки обертання з врахуванням дискретності ребристого наповнювача при нестаціонарних навантаженнях розглянуто в [4]. Вивчення нестаціонарних коливань п’ятишарових циліндричних оболонок обертання з врахуванням впливу дискретності ребер приведено в роботі [5].

В даній роботі розглядається постановка задачі нестаціонарної поведінки п’ятишарових конічних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер, побудова чисельного алгоритму із застосуванням апроксимацій типу Річардсона та розв’язування вказаних задач і аналіз отриманих результатів.

**Постановка задачі.** Дискретно-неоднорідна по товщині пружна структура конічного типу являє собою систему, що складається з багатошарової підкріпленої конічної оболонки з врахуванням дискретності ребер. Вважається, що багатошарова підкріплена конічна конструкція навантажена внутрішнім розподіленим нестаціонарним нормальним навантаженням $P_3(s,t)$, де $s$ і $t$ – просторова і часова координати.

При розгляді осесиметричних коливань конічних оболонок звичайно використовується система координат $s, t$, причому координата $s$ відраховується від вершини конуса. В деяких випадках, зокрема для зрізаних конічних оболонок, більш зручним є



 ISSN 1562-9945

використання координати $s_1$, де координата $s_1$ відраховується від краю оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні записуються наступним чином:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R_s, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \cos\alpha / R_s,$$

де $\alpha$ – кут конусності; $s_1$ – текуча координата; $R_s = R_0 + s_1 \sin\ \alpha$.

За допомогою варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів отримано наступні системи рівнянь:

в гладкій області

$$\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial\ s_1}(RT_{11}) - \frac{\sin\alpha}{R_s}T_{22} = \rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial\ t^2}\ , \tag{1}$$

$$\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial\ s_1}(R\overline{T}_{13}) - \frac{\cos\alpha}{R_s}T_{22} + P_3(s_1,t) = \rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial\ t^2}\ ,$$

$$\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial\ s_1}(RM_{11}) - \frac{\sin\alpha}{R_s}M_{22} - T_{13} = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial\ t^2}.$$

Співвідношення між величинами зусиль-моментів та відповідними величинами деформацій мають вигляд

$$(T_{11}, T_{22}, T_{13}) = \sum_k \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz})dz\ ; \tag{2}$$

$$(M_{11}^*, M_{22}^*) = \sum_k \int_z (z\sigma_{11}^{kz}, z\sigma_{22}^{kz})dz\ ;$$

$$(M_{11}, M_{22}) = (M_{11}^*, M_{22}^*) \pm h_{ck}(T_{11}, T_{22})\ ;$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\theta_1\ ;$$

$$I_1 = \sum_k \rho_k h_k\ ;\ I_2 = \sum_k \pm\rho_k h_k h_{ck}\ ;\ I_3 = \sum_k \rho_k \frac{h_k^3}{12}\ ;$$

Співвідношення між величинами деформацій та величинами узагальнених векторів переміщень записуються у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{\partial\ u_1^k}{\partial\ s_1} + \frac{1}{2}[\theta_1^k]^2\ , \tag{3}$$

$$\varepsilon_{22}^k = \frac{\sin\alpha}{R_s}\ u_1^k + \frac{\cos\alpha}{R_s}\ , \qquad \varepsilon_{13}^k = \varphi_1^k + \frac{\partial u_3^k}{\partial s_1}\ ,$$

$$\theta_1^k = \frac{\partial\ u_3^k}{\partial\ s_1}\ , \qquad \kappa_{11}^k = \frac{\partial\ \varphi_1^k}{\partial\ s_1}\ , \qquad \kappa_{22}^k = \frac{\sin\alpha}{R_s}\ \varphi_1^k\ .$$

На лініях розривів рівняння коливань записуються у вигляді

$$\sum_{i=1}^{2} T_{11}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial\ t^2}\ , \qquad \sum_{i=1}^{2} \overline{T}_{13}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial\ t^2}\ , \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{2} (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) = \rho_j I_{\kappa pj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial\ t^2}\ .$$

В рівняннях (4.14) величини $T_{11}^{i\pm}$, $\overline{T}_{13}^{i\pm} = T_{11}^{i\pm} + \theta_{11}^{i\pm}$, $M_{11}^{i\pm}$ $(i = 1, 2)$ відповідають зусиллям–моментам, які діють на $j-$ й дискретний елемент на лінії розриву $s_1 = s_{1j}$. Рівняння коливань (1)–(4) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

**Чисельний алгоритм**. Для побудови чисельного алгоритму розв’язку нестаціонарних задач теорії неоднорідних багатошарових оболонок використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих схем [6] для гіперболічних рівнянь. В силу вихідної постановки задач чисельний розв’язок шукається в гладкій області пружної структури (для багатошарової оболонки між ребрами) та на лініях розташування відповідних ребер.

Для побудови більш ефективних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв’язків по Річардсону [7]. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\tilde{\overline{U}}_{l(\Delta s)}^{n} = \frac{4}{3}\overline{U}_{l(\Delta s/2)}^{n} - \frac{1}{3}\overline{U}_{l(\Delta s)}^{n}, \tag{5}$$

де $\overline{U}_{l(\Delta s/2)}^{n}$ і $\overline{U}_{l(\Delta s)}^{n}$ - чисельні розв’язки рівнянь коливань відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті $\Delta s/2$ і $\Delta s$, $s = A_1\alpha_1$.

Неважко показати, що різницеві рівняння (5) апроксимують вихідні рівняння коливань (1) в гладкій області з четвертим порядком точності по координаті $s$.

**Результати розрахунків**. Як числовий приклад, розглядалася задача динамічного деформування п’ятишарової конічної оболонки з жорстко защемленими торцями під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_3(s,t)$. Граничні умови при $s = s_0$, $s = s_N$ мають вигляд: $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$ .

Нестаціонарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3(s_1,t) = A\cdot\sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t) - \eta(t-T)\right],$$

де $A$ – амплітуда навантаження, $T-$ тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50\cdot 10^{-6}$ с. Розрахунки

 ISSN 1562-9945

проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах:

$$E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = E_j = 7 \cdot 10^{10}\ \text{Па};\ E_1^1 / E_1^{зап} = 10 \div 1000;$$

$$\nu_1^1 = \nu_1^3 = \nu_1^5 = 0{,}3;\ \nu_1^{зап} = 0{,}4;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_j = 2{,}7 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3;\ \rho_1 / \rho_{зап} = 7;$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5;\ h_1 = h_3 = h_5 = 10^{-3}\ \text{м};\ h_2 = h_4;\ h_2 / h_1 = 3;$$

$$R_0 = 0{,}1\ \ м;\ \ h / h_j = 9/20;\ \ F_j = 10^{-4}\ \text{м}^2; \alpha_1 = \pi/3;\ \alpha_2 = \pi/4;\ \alpha_3 = \pi/6$$

Дискретні підкріплюючи елементи розташовано в точках $s_j = 0{,}25 s_N j$ , $j = \overline{1,3}$

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану п'ятишарової підкріпленої пружної структури конічного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$ ). Зокрема, на рис. 1 та рис. 2 приведено залежності величин $u_3$ і напруження $\sigma_{22}$ від просторової координати s в залежності від величини кутів конусності в момент часу t=4T і t=5,5T.

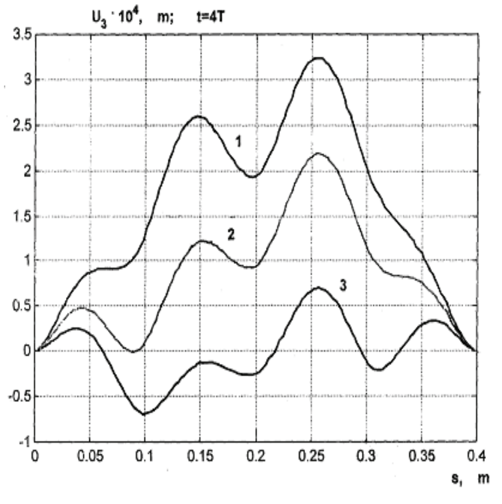


Рисунок 1 - Залежність величини $U_3$ від просторової координати s в момент часу t=4T

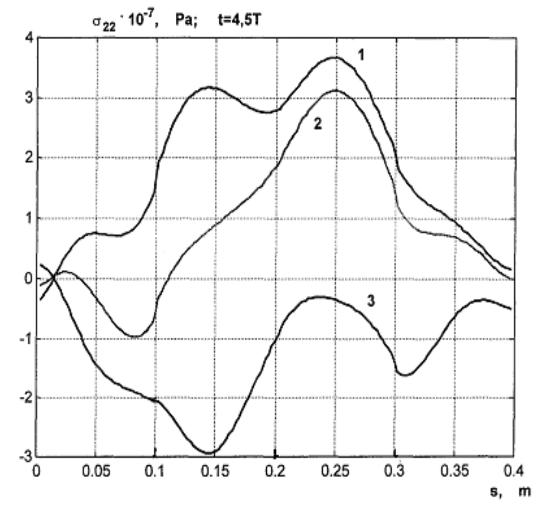


Рисунок 2 - Залежність величини $\sigma_{22}$ від просторової координати s в момент часу t=4,5T

Крива з індексом 1 відповідає куту конусності $\alpha_1 = \pi/3$; крива з індексом 2 – $\alpha_2 = \pi/4$, крива з індексом 3 – $\alpha_3 = \pi/6$. Розглядається випадок $E_1^1 / E_1^{зап} = 100$. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3$ і $\sigma_{22}$ по просторовій координаті (як частинний випадок, для циліндричної оболонки у випадку $\alpha = 0$ спостерігається симетрична картина відносно осі $s_1$ ).

## ЛІТЕРАТУРА


1. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках //Прикладная механика. – Т.37, №5. – 2001. – С.44-74.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Издат. – полиграф. центр «Киевский университет», 2005. – 536с.
3. Шульга Н.А., Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Нелинейные осесимметричные колебания трехслойных обоочек вращения при импульсных нагружениях // Теорет. и прикладная механика. 2001. Вып. 33. С. 159 – 163.
4. Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. Решение динамических задач теории трехслойных оболочек вращения с дискретным наполнителем при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. - №12. – Т.38, 2002. С. 103 – 110.
5. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестаціонарних навантаженнях // Вісник Київського університету. Серія Фіз. – мат. науки. - №3, 2002. С. 223 – 228.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454с.


Получено 03.05.2008 г.


ISSN 1562-9945