УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, В.Г. Овсиенко

К ТЕОРИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ УПРУГОГО СЖИМАЕМОГО СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работах [1-2] рассмотрены некоторые контактные задачи кручения предварительно напряженных тел, для которых существует аналогия с соответствующими задачами классической теории упругости (для тел без начальных напряжений). Эта аналогия имеет место, когда тело загружено только вдоль оси Oy_3, то есть:

$$S_{11}^0 = S_{22}^0 = 0; \quad S_{33}^0 \neq 0. \tag{1}$$

Здесь же рассматривается статическая контактная задача кручения для сжимаемого упругого слоя с однородным начальным состоянием. Предполагается, что соотношения (1) не имеют места и изотропный в естественном состоянии материал слоя подвергнут статической однородной деформации при таких условиях

$$S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0; \quad S_{33}^0 = 0. \tag{2}$$

Исследуем упругий слой толщиной h, одна граничная плоскость которого $z_3 = -h$ закреплена, а другая $z_3 = 0$ подвергается скручиванию по площадке $0 \le r \prec a$ жестким цилиндрическим штампом, который поворачивается на угол ε вокруг оси Oz_3.

Согласно [5], в этом случае имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \chi = 0; \quad \Psi = \Psi(r, z_3); \quad u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \\ \widetilde{Q}_{\theta|z_3} = const = \lambda_3 \mu_{13} \frac{\partial u_\theta}{\partial z_3} \end{gathered} \tag{3}$$

и уравнение для определения функции Ψ в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda_3^2 \mu_{13}}{\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \Psi = 0. \tag{4}$$

Введем замену

$$z = \Delta z_3, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\lambda_3^2 \mu_{13})^{-1} (\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)}. \tag{6}$$

Для данной задачи имеем такие граничные условия:

 ISSN 1562-9945

$$\text{при } z_3 = 0,\ (z = 0)\ \ u_\theta = \varepsilon \cdot r,\ (r \prec a);\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0,\ (r \succ a); \tag{7}$$

$$\text{при } z_3 = -h,\ (z = -h\Delta)\ \ u_\theta = 0. \tag{8}$$

Уравнение (4) с учетом (5) принимает вид [1], а соотношения (3) с учетом (5) и (6) будут такими

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \widetilde{Q}_{\theta|\, z=const} = \sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \tag{9}$$

Таким образом, необходимо найти решение уравнения (4) в случае отсутствия начальных напряжений при граничных условиях (7) и (8).

Решения уравнения (4) (без начальных напряжений) ищем в виде интегрального разложения Ханкеля по функциям $J_1(\lambda r)$.

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \int_0^\infty A(\lambda)\frac{sh\lambda(z + h\Delta)}{sh\lambda h\Delta} J_1(\lambda r)d\lambda. \tag{10}$$

Выбирая решение в виде (10), автоматически удовлетворяем дифференциальному уравнению (4) и граничному условию (8). Если подставить (10) в граничные условия (7), то приходим к двум интегральным уравнениям относительно одной неизвестной функции $A(\lambda)$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A(\lambda)\, J_1(\lambda r)d\lambda = \varepsilon \cdot r, \quad (0 \le r \prec a); \\ &\int_0^\infty \lambda A(\lambda) cth\lambda h\Delta\, J_1(\lambda r)d\lambda = 0, \quad (0 \prec r \prec \infty). \end{aligned} \tag{11}$$

Представим искомую величину $A(\lambda)$ в виде интеграла от новой неизвестной функции [4]

$$A(\lambda) = th\lambda h\Delta \int_0^a \varphi(t)\sin\lambda t dt. \tag{12}$$

Пользуясь методикой, развитой в работе [4], парные интегральные уравнения (11) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма II рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(t)[G(t - x) - G(t + x)]dt = \frac{4}{\pi}\varepsilon x,\ \ 0 \le x \le a, \tag{13}$$

где

$$G(y)=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h\Delta}}{ch\lambda h\Delta}\cos\lambda y\ \ d\lambda. \tag{14}$$

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулами (10) и (12), причем функция $\varphi(t)$ должна быть найдена из интегрального уравнения (13).

Входящий в решение неизвестный угол поворота штампа ε можно выразить через заданное значение крутящего момента M таким образом:

$$M=-\int_0^a\int_0^{2\pi}\widetilde{Q}_{\theta|(z=0,\ r\prec a)}r^2 drd\theta. \tag{15}$$

Значение крутящего момента M представим через функцию $\varphi(t)$ в виде

$$M=-4\pi\sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2\mu_{12}+S_{11}^0)}\int_0^a t\varphi(t)dt\,. \tag{16}$$

Введем вместо $\varphi(t)$ безразмерную функцию

$$\omega(\xi)=\frac{\pi}{4a\varepsilon}\varphi(x);\quad \xi=\frac{x}{a};\quad \tau=\frac{t}{a}; \tag{17}$$
$$x,\ t\in[0,\ a];\qquad \xi,\ \tau\in[0,\ 1].$$

Учитывая (16) и (17), получим

$$M=-16a^3\varepsilon\sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2\mu_{12}+S_{11}^0)}\int_0^1\tau\omega(\tau)d\tau\,. \tag{18}$$

Формула для коэффициента a, характеризующего связь угла поворота ε с приложенным моментом M, будет иметь вид:

$$a=\int_0^1\tau\omega(\tau)d\tau=-\frac{M}{16a^3\varepsilon\sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2\mu_{12}+S_{11}^0)}}\,. \tag{19}$$

Для получения численных результатов необходимо получить решение основного интегрального уравнения (13), которое с учетом (17) может быть представлено в безразмерной форме

$$\omega(\xi)=\xi+\frac{P_\sigma}{\pi}\int_0^1\omega(\xi)[K(\tau-\xi)-K(\tau+\xi)]d\tau\quad (0\le\xi\le 1), \tag{20}$$

где

$$P_\sigma=\frac{p}{\Delta};\quad p=\frac{a}{h};\quad K(u)=\int_0^\infty\frac{e^{-\mu}}{ch\mu}\cos P_\sigma u\mu d\mu\,. \tag{21}$$

 ISSN 1562-9945

Отметим, что при $h \to \infty$ $(p \to 0)$ имеем

$$\omega(\xi) = \xi; \quad a = \frac{1}{3}. \tag{22}$$

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (случай отсутствия начальных напряжений) получим формулу из [4]. Аналогично [4], заменяя значение интеграла в (20) его приближенным значением по квадратурной формуле трапеций, приводим задачу определения функции $\omega(\tau)$ к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Здесь ограничимся случаем сжимаемого слоя. Рассмотрим в качестве примера слой из материала, свойства которого описываются упругим потенциалом гармонического типа. Для коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}25$ и $p = 1$, получаем результаты, приведенные в таблице

ξ	$\omega(\xi)$				
	λ_1				
	0,9	0,95	1,0	1,05	1,1
0	0	0	0	0	0
0,1	0,1163	0,1108	0,1076	0,1056	0,1033
0,2	0,2322	0,2212	0,2150	0,2111	0,2066
0,3	0,3471	0,3312	0,3221	0,3164	0,3097
0,4	0,4606	0,4404	0,4288	0,4213	0,4164
0,5	0,5723	0,5486	0,5348	0,5260	0,5200
0,6	0,6820	0,6556	0,6401	0,6301	0,6233
0,7	0,7896	0,7614	0,7447	0,7338	0,7263
0,8	0,8948	0,8660	0,8485	0,8369	0,8289
0,9	0,9979	0,9692	0,9514	0,9395	0,9312
1,0	1,0958	1,0672	1,0540	1,0415	1,0330
a	0,3756	0,3630	0,3556	0,3507	0,3471

Анализ приведенных в таблице данных показывает, что при предварительном сжатии материала слоя влияние начальных напряжений более существенное, чем при предварительном растяжении. В случае отсутствия начальных напряжений ($\lambda_1 = 1$) полученные результаты совпадают с [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями// Докл. АН УССР. Сер. А.- 1980.- №6.-с. 48-52.

2. Гузь А. Н. К теории контактных задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями// Докл. АН УССР. Сер. А.- 1980.-№7.-с. 42-45.
3. Гузь А. Н. О представлении общих решений линеаризированной теории упругости сжимаемых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. - №2. – с. 1092-1095.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л. : Наука, 1967. – 403 с.
5. Guz A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research.- Applied Mechanics Reviews, vol 51, no 5, 1998, p. 343-371.

Получено 03.05.2008 г.