

УДК 539.3

О.Г. Галаган, Ю.П. Глухов

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С УЧЁТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Уравнения движения пластин, полученные в уточнённой постановке, сравнительно сложны. Классическая модель Кирхгофа существенно их упрощает, но не отражает, в должной мере, все свойства уточнённой модели, поэтому, в некоторых случаях, целесообразно использовать усовершенствованную теорию, учитывающую деформации сдвига и инерцию вращения [1]. Ряд постановок задач приводит к необходимости получить уравнения движения пластины не в декартовых, а в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ . Опираясь на основные положения этой теории, изложенной в [1,2], получим уравнения движения пластины в цилиндрических координатах.

Используем при этом следующие гипотезы:

Составляющая напряжения  $\sigma_{zz}$  мала по сравнению с другими составляющими, поэтому полагаем  $\sigma_{zz} \approx 0$ .

Точки, лежащие в срединной плоскости пластины совершают перемещения  $w$  (вверх или вниз по направлению оси  $Oz$ ), а перемещения  $u$  (в радиальном направлении) и  $v$  (в окружном направлении) считаются малыми и не учитываются.

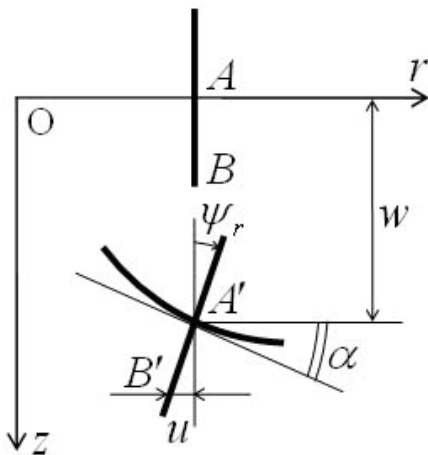


Рисунок 1

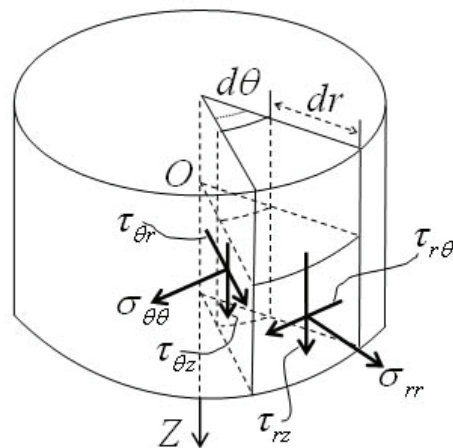


Рисунок 2

Прямолинейный нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости до деформации, не остаётся перпендикулярным к ней после деформации, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины (рис. 1). В соответствии с этой гипотезой можно принять

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \text{ Кроме того, можно записать}$$

$$u = z\psi_r(x, y, t), v = z\psi_\theta(x, y, t), w = w(x, y, t), \quad (1)$$

где функции  $\psi_r, \psi_\theta$  можно интерпретировать как повороты относительно радиального и окружного направления.

Функция  $w$  также должна зависеть от  $z$ . Позднее эту зависимость учтём заменой модуля сдвига  $G$  на

$$G' = kG, \quad (2)$$

где  $k$  – сдвиговой коэффициент Тимошенко.

Рассмотрим пластину толщиной  $2h$ . Вырежем из пластины цилиндрический элемент (рис.2). Совместим его ось вращения с осью  $Oz$ . Пусть срединная плоскость пластины проходит через  $z = 0$ . При изгибе в пластине действуют нормальные напряжения – радиальное  $\sigma_{rr}$  и окружное  $\sigma_{\theta\theta}$  и касательные  $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ . Напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$  изменяются по толщине пластины по линейному закону с наибольшими значениями вблизи внешних поверхностей пластины. Касательные напряжения  $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$  изменяются по толщине по параболическому закону. Ввиду отсутствия касательных нагрузок на внешних поверхностях  $z = \pm h$  получим

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (3)$$

Выделим из пластины элемент с размерами  $2h, dr, rd\theta$ . Обозначим элементарные площадки этого элемента:  $dF_\theta = drdz$  – радиальную,  $dF_r = rd\theta dz$  – окружную. Если ширина каждой площадки 1, то на площадке  $dF_\theta = 1 \times dz$  действуют силы:  $\sigma_{\theta\theta} dz, \tau_{\theta r} dz, \tau_{\theta z} dz$ , а на  $dF_r = 1 \times dz$  – силы  $\sigma_{rr} dz, \tau_{r\theta} dz, \tau_{rz} dz$ . Они создают бесконечно малые нормальные и касательные силы и моменты относительно осей  $n \perp dF_r, s \perp dF_\theta$ , задающих радиальное и окружное направления. Рассматривая силы и моменты, приходящиеся на единицу ширины площадки и суммируя их по толщине пластины, получим:

поперечные силы

$$Q_r = \int_{-h}^h \tau_{rz} dz, \quad Q_\theta = \int_{-h}^h \tau_{\theta z} dz; \quad (4)$$

изгибающие моменты

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_{rr} z dz, \quad M_\theta = \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} z dz; \quad (5)$$

крутящие моменты

$$H_{r\theta} = H_{\theta r} = \int_{-h}^h \tau_{r\theta} z dz; \quad (6)$$

нормальные силы

$$N_r = \int_{-h}^h \sigma_{rr} dz, \quad N_\theta = \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} dz; \quad (7)$$

сдвигающие силы

$$S_r = S_\theta = \int_{-h}^h \tau_{r\theta} dz. \quad (8)$$

Получим формулы позволяющие определять силы и моменты (4) – (8) через функции (1).

Согласно [3, 4] в цилиндрических координатах:

составляющие деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (9)$$

закон Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})]; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})]; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})]; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим выражения (10) содержащие  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$  на  $\frac{3}{2h^3}z$  и проинтегрируем по толщине пластины. Учитывая (5) и (6) и то, что  $\sigma_{zz} \approx 0$ , после преобразований получим

$$M_r = D(\Gamma_{rr} + \nu\Gamma_{\theta\theta}), \quad M_\theta = D(\Gamma_{\theta\theta} + \nu\Gamma_{rr}); \quad (11)$$

$$H_{r\theta} = \frac{(1-\nu)D}{2} \Gamma_{r\theta}, \quad (12)$$

где составляющие деформации пластины записаны в виде

$$(\Gamma_{rr}, \Gamma_{\theta\theta}, \Gamma_{r\theta}) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}) z dz; \quad (13)$$

$D$  – цилиндрическая жесткость пластины

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (14)$$

Учитывая (2) и (10), получим

$$\varepsilon_{\theta z} = G'\tau_{\theta z}, \quad \varepsilon_{rz} = G'\tau_{rz}. \quad (15)$$

Умножим выражения (15) на  $\frac{1}{2h}$  и проинтегрируем по толщине пластины. Учитывая (4), получим

$$Q_\theta = 2hG'\Gamma_{\theta z}, \quad Q_r = 2hG'\Gamma_{rz}, \quad (16)$$

где

$$(\Gamma_{rz}, \Gamma_{\theta z}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (\varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}) dz. \quad (17)$$

Из (10), учитывая, что  $\sigma_{zz} \approx 0$ , после преобразований получим

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}). \quad (18)$$

Подставим (18) в (7) и учтём (9). Проинтегрировав, получим

$$N_r = 0, \quad N_\theta = 0. \quad (19)$$

Учитывая (9) и (10), вычислим интеграл (8). Получим

$$S_r = S_\theta = 0. \quad (20)$$

Также найдём интегралы (13) и (17), учитывая (9) и (10).

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r}; \quad \Gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r}; \quad \Gamma_{r\theta} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r}; \\ \Gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r; \quad \Gamma_{\theta z} = \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда выражения (11), (12) и (16) с учетом (21) примут вид

$$\begin{aligned} M_r &= D \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \psi_r \right); \\ M_\theta &= D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right); \\ H_{r\theta} = H_{\theta r} &= \frac{(1-\nu)D}{2} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right); \\ Q_\theta &= 2hG' \left( \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ Q_r &= 2hG' \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть обе внешние поверхности пластины параллельные срединной плоскости нормально нагружены, то есть

$$\sigma_{zz}|_{z=h} = q_1(x, y, t), \quad \sigma_{zz}|_{z=-h} = q_2(x, y, t). \quad (24)$$

Обозначим

$$q(x, y, t) = q_1(x, y, t) - q_2(x, y, t). \quad (25)$$

Умножим первые два уравнения (23) на  $z$  и проинтегрируем по толщине пластины, а третье уравнение (23) непосредственно проинтегрируем по толщине пластины с учетом (24) и (25). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\theta r}}{\partial \theta} - Q_r + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta + \frac{2}{r} H_{r\theta} &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + q + \frac{1}{r} Q_r &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем уравнения (1.26) с помощью соотношений (1.22). Получим уравнения движения пластины в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} \left( 2\nabla^2 \psi_r + \left( \frac{1-\nu}{r} - \frac{2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial r} - \frac{3-\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \psi_r \right) - \\ - 2hG' \left( \psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} \left( 2\nabla^2 \psi_\theta + \left( 1-\nu + \frac{2\nu}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial r} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \left( \frac{2}{r^2} + \frac{2-2\nu}{r} \right) \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{r^2} \psi_\theta \right) - 2hG' \left( \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}; \\ 2hG' \left( \nabla^2 w + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Члены уравнений (27), содержащие  $G'$ , характеризуют поперечный сдвиг, а члены содержащие  $\frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}, \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$  – влияние инерции вращения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Mindlin R.D.* Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates// Trans.ASME. Ser.E.J.Appl.Mech. – 1951.- 18, № 1. – P.31 – 38.
2. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. – М.: Мир, 1971. – 557 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва: Объединённое научно-техническое издательство, 1935. – 675 с.
4. *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. – Москва: Высшая школа, 1966. – 228 с.

Получено 03.05.2008 г.