

ТОВЩИННІ НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ П'ЕЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу радіальних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних збуреннях. Нехай внутрішній радіус кулі $r_1 = R - h$, зовнішній – $r_2 = R + h$. Коливання кулі описуються рівнянням руху і квазістатичним рівнянням для електричних змінних [2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; & \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Початкові умови накладаються на переміщення та їх швидкості [3]

$$u(x, 0) = u^0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x). \quad (3)$$

На зовнішніх вільних від механічних навантажень електродованих поверхнях сфери задається електричний потенціал. Маємо граничні умови в вигляді:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, t) = 0; \quad \varphi(R \pm h, t) = \pm V(t). \quad (4)$$

Початково-крайову задачу (1)-(4) зводимо до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$\begin{aligned} r = R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}, \\ \bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

де ρ_{00} , c_{00} , ε_{00} , $t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини. Введення параметра кривизни ε дозволяє в частинному випадку при $\varepsilon = 0$ знаходити розв'язок задачі про коливання плоского п'єзокерамічного шару [1]. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Маємо систему рівнянь електропружності (1), (2) в безрозмірному вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial x} + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_r = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} u + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + (c_{11} + c_{21}) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} u + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{13} \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} u - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Початкові і граничні умови (3)(4) не змінюють свого вигляду.

Для розв’язання початково-крайової задачі (6)(7)(3)(4) будується чисельна схема на основі сіткових апроксимацій і різницевих схем. В інтервалі інтегрування $x \in [-1, 1]$ вводиться розбиття Ω таким чином, що крайні точки розбиття знаходяться на відстані $\Delta_x / 2$ від кінців інтервалу:

$$\Omega = \{x_i = (i - n - 0.5)\Delta x; \quad i = 0, 1, \dots, 2n + 1; \quad \Delta x = 1/n\}.$$

Механічні переміщення та електричний потенціал будемо шукати в вузлах розбиття, а механічні напруження і електрична індукція – в центрах комірок розбиття. Різницева форма рівнянь електропружності (6) записується для внутрішніх точок розбиття і приймає вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_i} (\sigma_{i+0.5}^{rr} + \sigma_{i-0.5}^{rr} - \sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} - \sigma_{i-0.5}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{\Delta x} (\sigma_{i+0.5}^{rr} - \sigma_{i-0.5}^{rr}),$$

$$\frac{1}{\Delta x} (D_{i+0.5}^r - D_{i-0.5}^r) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_i} (D_{i+0.5}^r + D_{i-0.5}^r) = 0. \quad (8)$$

Матеріальні співвідношення (7) записуємо в центрах комірок розбиття:

$$\sigma_{i+0.5}^{rr} = \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}}\right) u_{i+1} + \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{c_{33}}{\Delta x}\right) u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$\sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} = \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1+\varepsilon x_{i+0.5})}\right) u_{i+1} + \left(c_{11} \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1+\varepsilon x_{i+0.5})} - \frac{c_{13}}{\Delta x}\right) u_i + \frac{e_{13}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i); \quad (9)$$

$$D_{i+0.5}^r = \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}}\right) u_{i+1} + \left(e_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{e_{33}}{\Delta x}\right) u_i - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i).$$

Значення переміщень та електричного потенціалу в законтурних точках розбиття виключаються з рівнянь за допомогою різницевої форми граничних умов. Отримуємо наступні вирази:

$$\varphi_0 = -\varphi_1 - 2V_0(t);$$

$$\varphi_{2n+1} = -\varphi_{2n} + 2V_0(t);$$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x}\right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x}\right) u_1 + 2e_{33} \frac{\varphi_1 + V_0(t)}{\Delta x} \right); \\
 u_{2n+1} &= -\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x}\right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x}\right) u_{2n} + 2e_{33} \frac{V_0(t) - \varphi_{2n}}{\Delta x} \right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Розв’язуючу систему рівнянь отримуємо шляхом підстановки в (8) співвідношень (9), (10). Для інтегрування по часу вводимо розбиття ω , інтервалу часу $t \in [0, T]$ з кроком Δt . Розв’язок шукається за допомогою явної різницевої схеми

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (11)$$

або методом Ньюмарка

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{u}^k; \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (12)$$

де ξ – параметр схеми.

При використанні схеми Ньюмарка (12) маємо систему $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$, з якої всі шукані величини знаходяться одночасно. При застосуванні явної схеми (11) механічні переміщення на $k+1$ -му часовому шарі знаходяться через значення параметрів електромеханічного стану на попередніх часових шарах за допомогою стандартних виразів методу, тоді як електричний потенціал знаходиться з системи алгебраїчних рівнянь, що отримується з різницевої форми квазістатичного рівняння для електричної індукції.

Проаналізувавши результати обчислень, встановлено, що для метода Ньюмарка оптимальним є значення параметра $\xi = 0.5$. Розв’язки обома методами співпали з точністю 99% при $n=31$, $\Delta t = 0.0125$. Відмітимо, що метод Ньюмарка як абсолютно стійкий метод дає достатню збіжність і при значно більших ($\Delta t = 0.0250$) значеннях кроку по часовій координаті, ніж явна схема.

Розглянемо задачу про вимушені нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [2] з параметром кривизни $\varepsilon = 0.1$ при нульових початкових умовах та навантаженні електричним потенціалом, що описується функцією $V(t) = V_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда. За нормуючі величини вибрано ρ , c_{33}^E , ε_{33}^S , $t_h = h \sqrt{\rho / c_{33}^E}$. При переході до розмірних величин для фізичності задачі вважаємо $V_0 = 10^{-4}$, $h = 1 \text{ мм}$.

На рис. 1 представлена динаміка зміни радіальних переміщень u різних точок стінки кулі. Бачимо, що коливання серединної поверхні $x=0$ описуються гладкими кривими з періодом $T_u \approx 43$, а переміщення зовнішніх поверхонь, крім коливань з періодом T_u , здійснюють коливання відносно серединної поверхні з періодом, що є подвоєним часом пробігу електропружної хвилі товщини стінки кулі. Період коливань серединної поверхні залежить від параметра кривизни ε . Відмітимо, що прикладене навантаження викликає періодичне розширення кулі з максимальним розмірним відхиленням серединної поверхні $u_{\max} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$.

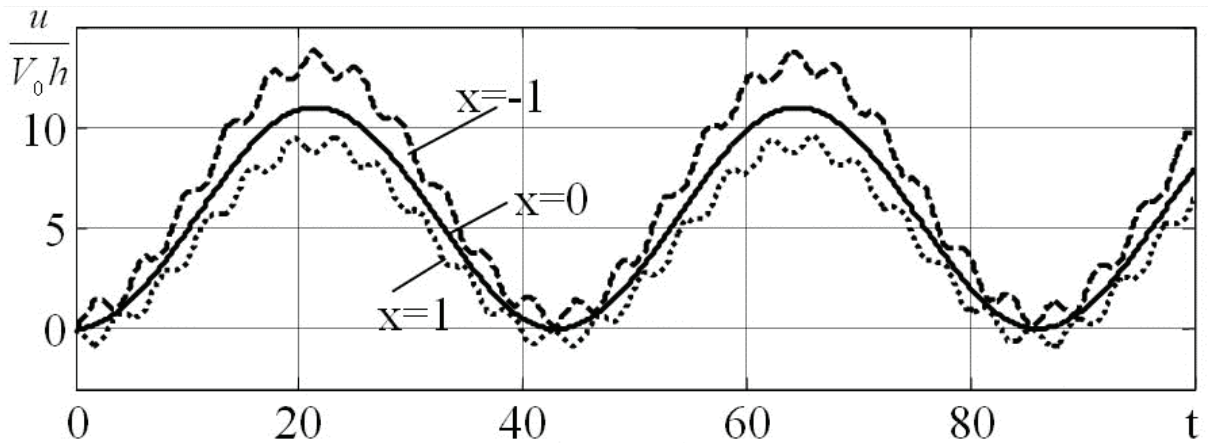


Рисунок 1

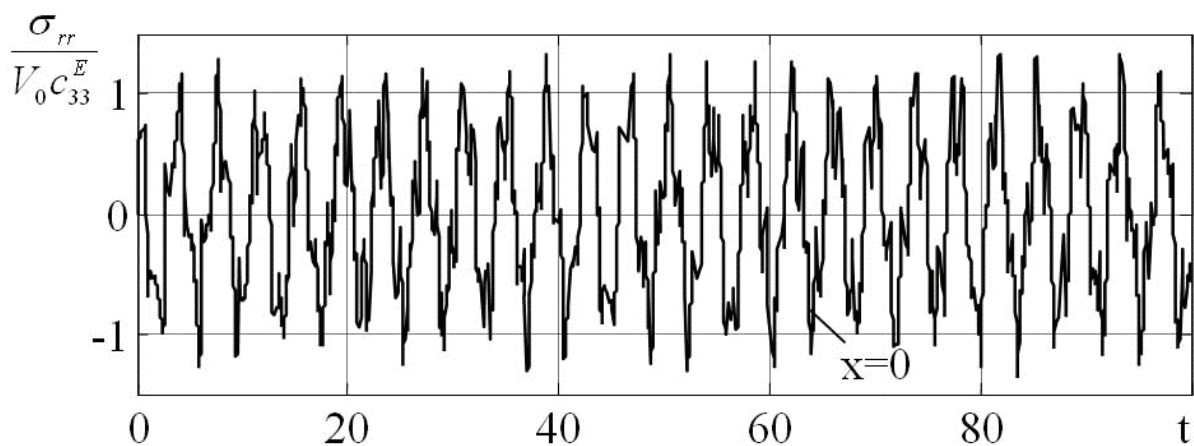


Рисунок 2

Радіальні напруження максимальні на серединній поверхні. Рис. 2 ілюструє зміну радіальних напружень при $x=0$. Бачимо, що

напруження в перерізі виникають миттєво згідно до розподілу електричного потенціалу в момент прикладання навантаження, і з часом досягають максимального розмірного значення $\sigma_{\max} = 18 \text{ МПа}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
2. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України. — 2008. – № 6. — С. 36-45.

Получено 26.03.2008 г.