УДК 534-21:537.226.86

Л.О. Григор'єва

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ШАРУ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

В даній роботі методом характеристик побудовано аналітичний розв'язок задачі про товщинні коливання плоского п'єзокерамічного шару при нестаціонарних електричних навантаженнях. Для розв'язання диференціального рівняння для продовження функцій розв'язку використовується чисельний метод, що дозволяє суттєво збільшити інтервал розв'язку по часовій координаті.

Коливання поляризованого по товщині п'єзокерамічного шару товщиною $2h$ описуються рівнянням руху та рівнянням Гауса [3]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x};\ \frac{\partial D_x}{\partial x}=0, \tag{1}$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\sigma_x=c_{33}^E\frac{\partial u}{\partial x}+e_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ D_x=e_{33}\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon_{33}^S\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{2}$$

На зовнішніх електродованих вільних від механічних навантажень поверхонь $x=\pm h$ задається різниця електричного потенціалу $2V(t)$:

$$\varphi(\pm h,\ t)=\pm V(t);\ \sigma_x(\pm h,\ t)=0. \tag{3}$$

Початкові умови для переміщень та їх швидкостей приймаємо нульовими:

$$u(x,t=0)=0;\ \dot u(x,t=0)=0. \tag{4}$$

Диференціальні рівняння (1) з врахуванням матеріальних співвідношень (2) можна звести до рівнянь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_{33}^S\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-e_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{6}$$

Тут постійна $c_1=\sqrt{(c_{33}^E+e_{33}^2/\varepsilon_{33}^S)/\rho}$ – швидкість поширення електропружної хвилі в напрямку поляризації .

Інтегруючи (6) при електричних граничних умовах з (3), отримуємо вираз для електричного потенціалу через переміщення

$$\varphi(x,t)=\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^{S}}\left(u(x,t)-\frac{x}{h}u(h,t)\right)+\frac{x}{h}V(t). \tag{7}$$

З (2) з врахуванням (7) маємо вираз для механічних напружень:

$$\sigma_x(x,t)=\left(c_{33}+\frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}}\right)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)-\frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^{S}h}u(h,t)+\frac{e_{33}}{h}V(t). \tag{8}$$

Електрична індукція постійна по товщині шару і визначається виразом

$$D_x=\frac{e_{33}}{h}(f(c_1t+h)-f(c_1t-h))-\frac{\varepsilon_{33}}{h}V(t). \tag{9}$$

В співвідношеннях (1)-(9) вводяться безрозмірні величини [3]

$$\bar{x}=x/h,\quad \bar{t}=t/t_h,\quad \bar{u}=u/h,\quad \bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}/c_{00},\quad \bar{\rho}=\rho/\rho_{00},$$

$$\bar{\varphi}=\varphi\sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00}h^2}},\quad \bar{D}_i=\frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}},\quad \bar{e}_{ij}=\frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}},\quad \bar{c}_{ij}=\frac{c_{ij}^{E}}{c_{00}},\quad \bar{\varepsilon}_{ii}=\frac{\varepsilon_{ii}^{S}}{\varepsilon_{00}},$$

де $\rho_{00}=\rho$, $c_{00}=c_{33}^{E}$, $\varepsilon_{00}=\varepsilon_{33}^{S}$, $t_h=h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини. Для загальності розв'язку параметр h не виключаємо, а приймаємо $\bar{h}=1$. Надалі знаки безрозмірності опущені, і всі результати представлені в безрозмірному вигляді.

Так як в задачі (1)–(4) механічні переміщення антисиметричні, а напруження симетричні відносно серединної площини, то розв'язок будемо шукати в області $x\in[0,h]$ при граничних умовах

$u(0,t)=0$;

$$\left(c_{33}+\frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x=h,t)-\frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^{S}h}u(x=h,t)+\frac{e_{33}}{h}V(t)=0. \tag{11}$$

Таким чином, задача (1)–(4) звелась до задачі (5) (11) при початкових умовах (4). Загальний розв'язок хвильового рівняння (5) представляється [2] формулою Даламбера

$$u(x,t)=f(c_1t+x)+g(c_1t-x), \tag{12}$$

де $f(\cdot)$, $g(\cdot)$– довільні функції. Підставляючи (12) в першу граничну умову з (11), виражаємо одну шукану функцію через іншу:

$$f\,(c_1t)+g(c_1t)=0\quad\Rightarrow\quad g(z)=-f(z).$$

Тепер переміщення будемо шукати в вигляді

$$u(x,t)=f(c_1t+x)-f(c_1t-x). \tag{13}$$

З початкових умов

$f(x)-f(-x)=0\quad\Rightarrow\quad f'(x)+f'(-x)=0$ при $x\in[0,h]$.

ISSN 1562-9945

$$c_1(f'(x)-f'(-x))=0 \quad \Rightarrow \quad f'(z)=0 \text{ при } z\in[-h,h].$$

$$\Rightarrow f(z)=const=0 \text{ при } z\in[-h,h]. \qquad (14)$$

Друга гранична умова (10) з врахуванням (13) приймає вигляд

$$\rho c_1^2(f'(c_1t+h)+f'(c_1t-h))-\frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S h}(f(c_1t+h)-f(c_1t-h))+\frac{e_{33}}{h}V(t)=0. \qquad (15)$$

Якщо ввести сталі $a=\dfrac{e_{33}^2}{\rho c_1^2\varepsilon_{33}h}$, $b=\dfrac{e_{33}}{\rho c_1^2 h}$, $d=\dfrac{1}{\rho c_1^2}$ і заміну змінних $z=c_1t+h$, звідки $t=(z-h)/c_1$, то диференціальне рівняння (15) для визначення функції $f(z)$ при $z>h$ приймає вигляд:

$$f'(z)-a\,f(z)=-f'(z-2h)-a\,f(z-2h)-bV((z-h)/c_1). \qquad (16)$$

Інтегруючи рівняння (16) по ділянках $(2n-1)h\le z<(2n+1)h$, знаходимо функцію $f(z)$ на интервалі $z\in[h,c_1T+h]$, де $T-$ довжина інтервалу часу, що розглядається. Механічні переміщення знаходяться за (13), електричний потенціал, механічні напруження і електричну індукцію– за (7)-(9) відповідно.

Аналітичний розв’язок звичайного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (16) при конкретних функціях навантаження є досить трудоємним завданням, що пов’язано з суттєвим ускладненням правої частини рівняння з зростанням інтервалу часу, що розглядається. Застосування методу послідовних наближень до розглядання коливань п’єзокерамічних тіл ускладнено необхідністю використання великої кількості наближень. Таким чином, оптимальним способом знаходження розв’язку на досить великих інтервалах часу при довільних навантаженнях є чисельне інтегрування рівняння (16). Для цього введемо розбиття інтервалу $z\in[-h,(2n-1)h]$, де n – найменше ціле число, що задовольняє нерівність $c_1T+h\le(2n-1)h$:

$$\omega_z=\{z_i=(i-1)\Delta z-h \mid \Delta z=h/k,\ k\in Z,\ i=1,\dots,2nk+1\}.$$

Розв’язок будемо шукати в точках розбиття $f_i=f(z_i)$.

З (14) маємо, що при $1\le i\le 2k+1$ $f_i=0$. При $i>2k+1$ для розв’язання можна скористатися як явною $f_i'=(f_{i+1}-f_i)/\Delta z$, так і неявною $f_{i+1}'=(f_{i+1}-f_i)/\Delta z$ схемою. Так як представлені методи мають перший порядок точності, для достатньої точності обчислень обома методами вибираємо досить велику кількість точок розбиття, наприклад, $k=50$.

В якості прикладу розглядається п'єзокерамічний шар з кераміки PZT-4 [3], якому відповідають безрозмірні сталі $e_{33}=0.59$, $c_{33}=1$, $\rho=1$, $\varepsilon_{33}=1$. До зовнішніх електродованих поверхонь шару миттєво прикладається постійний електричний потенціал $V(t)=V_0H(t)$, $V_0=1$, де $H(t)-$ функція Хевісайда.

Рис. 1 ілюструє зміну переміщень на зовнішній поверхні $x=-1$ (а) та зміну механічних напружень в серединній поверхні $x=0$ (б) на інтервалі $t\in[0, 60]$, що є значно більшим за інтервал часу, що розглядається в [1].

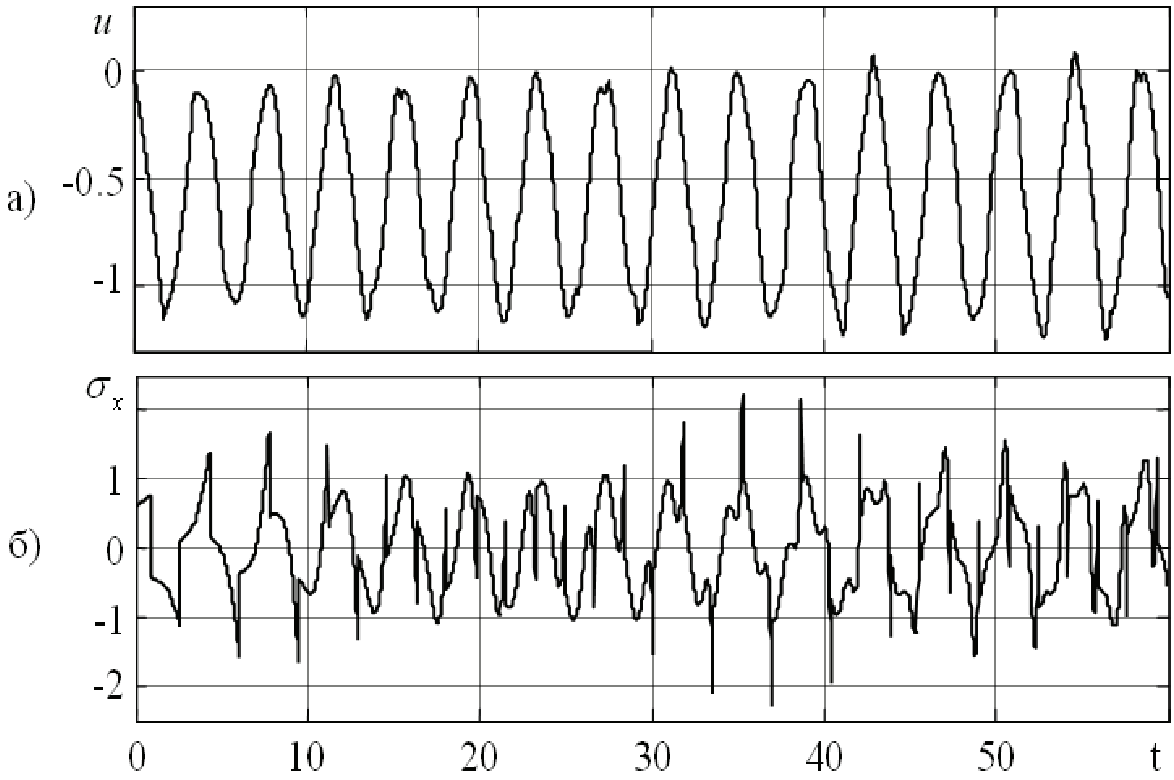

Рисунок 1

Бачимо, що на розглянутому інтервалі амплітуда кривих переміщень змінюється майже на 40%, при чому максимальні переміщення виникають при $t>40$. Зміна напружень в часі більш значна, і максимальні стискуючі напруження $\sigma_{x\max}=2.2$ виникають при $t=37$.

При переході до розмірних змінних необхідно враховувати, що коефіцієнт навантаження не повинен перевищувати безрозмірного значення $V_0=10^{-4}$. При такому коефіцієнті максимальні розмірні значення механічних напружень досягають $\sigma_{\max}=30.58МПа$, а відповідні їм максимальні переміщення в шарі товщиною $2h = 2мм$ рівні $u_{\max} = 1.35 \cdot 10^{-4}\,мм$. Розглянуто інтервал часу $0 \le t \le 1.53 \cdot 10^{-4}\,c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. М., Улитко А. Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. –1975. – 11, №1.– С. 22–27.
2. Положій Г. М. Рівняння математичної фізики.– К.: Радянська школа, 1959. – 480 с.
3. Шульга Н. *А., Болкисев А. М*. Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.

Получено 03.05.2008 г.