

**ФОРМИ КОЛИВАНЬ НА ГРАНИЦЯХ ЗОН ПРОПУСКАННЯ
ОБ’ЄМНИХ ХВИЛЬ ЗСУВУ В ДВОКОМПОНЕНТНИХ
ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТАХ З МІЖФАЗНИМИ
НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ**

Перебіг хвильових процесів в композитних матеріалах визначається механічними властивостями матриці і наповнювача та якістю границь розділу наповнювач-матриця [2]. В теоретичних дослідженнях безперечна перевага надається [3] ідеальній моделі, в якій композит розглядається як досконалий хімічний дисконтинуум і досконалий хімічний континуум. Відповідно до цієї концепції НДС компонент (фаз) описується співвідношеннями механіки деформування твердих тіл, а на поверхнях розділу виконуються умови досконалого механічного контакту $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$, $u^+ = u^-$. Для моделювання міжфазних недосконалостей в тонкому міжфазному прошарку з неповністю визначеними фізико-механічними властивостями і підвищеною дефектністю вводиться [3, 4] гіпотетична міжфазна поверхня з контактними умовами $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$, $u^+ = u^- + \eta_n \cdot \sigma_n^-$. При вивченні поширення хвиль довільного частотного діапазону в шаруватих композитах використовується структурна (кусково-однорідна) модель при досконалому механічному міжфазному контакті. Основні результати цих досліджень висвітлені в монографії [3]. Узагальнення досліджень про поширення хвиль в рамках структурної моделі при недосконалому механічному контакті викладаються в роботах [1, 4, 5, 6 та ін.], продовженням яких є дана стаття.

Розглянемо двокомпонентний регулярно-шаруватий композит з міжфазними недосконалостями та дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо через $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2 . Координатні вісі x_1 , x_2 , x_3 направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. Для хвиль зсуву $u_1(0, x_2, x_3, t) \neq 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ або $u_1 = 0$, $u_2(x_1, 0, x_3, t) \neq 0$, $u_3 = 0$ необхідно знайти розв’язок системи рівнянь

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{6-m,m-3}}{\partial x_{m-3}} + \frac{\partial \sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad (1)$$

$$\sigma_{3,6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_{m-3}}, \quad m = 4, 5. \quad (2)$$

На міжфазних площинах $x_3 = x_{3,2n-2+q}$ ($q = 1, 2$, n – ціле число) з недосконалим механічним контактом повинні виконуватися [1, 5] умови спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Запишемо розв’язок рівняння (1), (2) для кожного із шарів у вигляді біжучих хвиль

$$\begin{aligned} u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1; \\ u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h + h_1 < x_3 < nh. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (4) і далі використовуються позначення $\bar{\rho}_q \rho_{00} = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\alpha_{mm,q}^2 = (\rho_q \omega^2 - k^2 c_{66,q}) / c_{mm,q}$; $\bar{\alpha}_{mm,q} = h \alpha_{mm,q}$, $\bar{k} = kh$, де ρ_{00} , c_{00} , h – нормуючі параметри.

Розв’язок (4) записаний при $\alpha_{mm,q}^2 \geq 0$. Якщо $\alpha_{mm,q}^2 = -\beta_{mm,q}^2 < 0$, то в формулах (4) і наступних треба прийняти $\alpha_{mm,q} = i\beta_{mm,q}$, $\sin i\beta_{mm,q}(\dots) = ish\beta_{mm,q}(\dots)$, $\cos i\beta_{mm,q}(\dots) = ch\beta_{mm,q}(\dots)$.

З контактних умов (3) на межах $x_3 = x_{3,2n-1} \equiv (n-1)h + h_1$ між $(2n-1)$ -им і $2n$ -им шарами і на межах $x_3 = x_{3,2n} \equiv nh$ між $2n$ -им і $(2n+1)$ -им шарами одержимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{A}_{2n}, \quad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{A}_{2n-1}, \quad (5)$$

в яких введені вектор-стовпці $\mathbf{A}_n = \operatorname{col}[A_n^{(1)}, A_n^{(2)}]$ і матриці $\mathbf{M}_{mm}(h_q)$ з елементами

$$M_{mm}^{(11)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q, \quad M_{mm}^{(12)}(h_q) = -\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(21)}(h_q) = \frac{\sin \alpha_{mm,q} h_q}{\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q}} + \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(22)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q - \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

причому $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} c_{00} / h$.

Якщо розв’язок нескінченної системи (5) представити [1, 3-6] у вигляді

$$\mathbf{A}_{2n} = \chi_{mm}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm}, \quad \mathbf{A}_{2n-1} = \chi_{mm}^n \mathbf{X}_{mm}, \quad (6)$$

то для визначення скаляру χ_{mm} і вектора \mathbf{X}_{mm} одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} \mathbf{I}_2) \mathbf{X}_{mm} = 0. \quad (7)$$

Тут \mathbf{I}_2 – одинична матриця другого порядку, $\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{M}_{mm}(h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів товщини h_1 і h_2 .

З умови існування нетривіального розв’язку однорідної системи (7) одержимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0, \quad (8)$$

оскільки безпосередніми перетвореннями знаходимо, що $\det \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = 1$, а коефіцієнт $b_{mm} = 0,5 \text{Spur} \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1)$.

Кожному з нерівних між собою характеристичних чисел $\chi_{mm,1}$, $\chi_{mm,2}$ відповідають лінійно незалежні між собою власні вектори $\mathbf{X}_{mm,1}$, $\mathbf{X}_{mm,2}$ і невідомі \mathbf{A}_n в розв’язку (6) будуть суперпозицією

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2n} &= Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,2}, \\ \mathbf{A}_{2n-1} &= Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{X}_{mm,2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Невідомі сталі Q_1 , Q_2 повинні бути визначені з граничних умов.

Аналіз рівняння (8) показує, що розв’язок (9) буде обмеженим при $n \rightarrow \pm\infty$ ($-\infty < x_3 < +\infty$), якщо дисперсійне рівняння (8) матиме рівні за модулем одиниці комплексні корені. Це матиме місце при умові

$$-1 < b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) < +1, \quad (10)$$

яка і визначає зони пропускання хвиль поперек структури матеріалу.

Для ідентифікації експериментальних вимірювань важливо знати також просторові форми хвиль. Для частот, які обмежують зони пропускання хвиль, тобто при $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = \pm 1$, аналіз розв’язків системи (5) дозволяє установити просторові форми хвиль [4].

На межах $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = +1$ зон пропускання (10) відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_2(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (11)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} (C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1)) - \tilde{A}_2^{(2)} (C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2)) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

та антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (13)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} (S_1(H_1) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_1(H_1)) + \tilde{A}_2^{(1)} (S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На межах $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = -1$ зон пропускання (10) відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (15)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} (C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1)) + \tilde{A}_2^{(1)} (\bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

та антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (17)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} (S_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_1(H_1)) - \tilde{A}_2^{(2)} (C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В формулах (17)-(24) використовуються позначення

$$\bar{a}_{mm,q} = \bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q}, \quad S_q(x_3 - x_{3q}) = \bar{a}_{mm,q}^{-1} \sin \alpha_{mm,q}(x_3 - x_{3q}),$$

$$C_q(x_3 - x_{3q}) = \cos \alpha_{mm,q}(x_3 - x_{3q}), \quad x_{31} = H_1, \quad x_{32} = h_1 + H_2, \quad 2H_q = h_q.$$

При кількісному аналізі основна увага зверталася на вплив міжфазних параметрів $\eta_{3,6-m}$ на дисперсійні і амплітудні характеристики. Розглядався композит з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1 = 1$, $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = \bar{c}_{66,1} = 1$, $\bar{\rho}_2 = 2$, $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = \bar{c}_{66,2} = 20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00} = \rho_1$, $c_{00} = c_{66,1}$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1 = 0,3h$ і $h_2 = 0,7h$. Міжфазний параметр $\bar{\eta}_{31} = \bar{\eta}_{32} = 0,0$ (міжфазні недосконалості відсутні); 0,1; 0,5; 1,0; 5,0.

Проведений аналіз показав, що в матеріалах з міжфазними недосконалостями на відміну від матеріалів з досконалим сполученням компонент не існує напрямку, в якому проходять хвилі всіх частот. Найбільш характерною особливістю впливу міжфазного параметру на структуру зон пропускання хвиль є їх сильне звуження при збільшенні. Виявити ці вузькі зони, особливо при високих частотах, можливо тільки по аналізу типів коливань на межах зон пропускання об'ємних хвиль. При збільшенні міжфазних параметрів границі зон пропускання асимптотично наближаються до дисперсійних кривих для нормальних хвиль зсуву в шарах товщиною h_1 і h_2 .

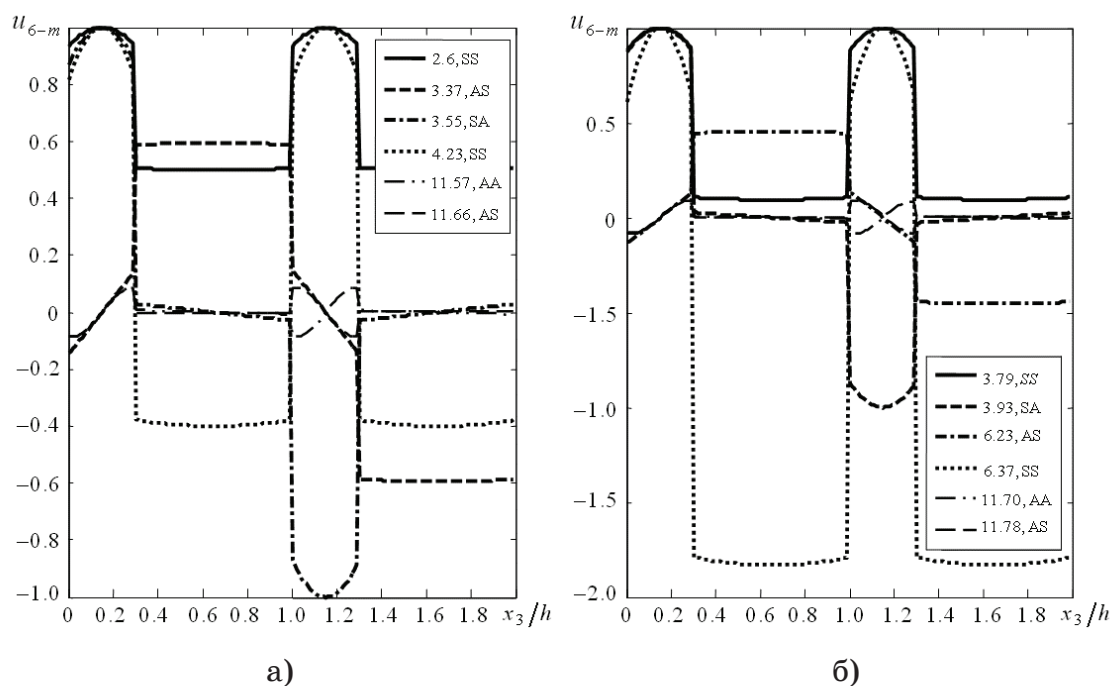


Рисунок 1

На рис.1 наведені результати розрахунку форм хвиль для того ж матеріалу при $\bar{k}=0,96$ (рис.1,а) та $\bar{k}=1,92$ (рис.1,б) на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. На рис.1,а крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_1 = 2,601746$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2 = 3,369278$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3 = 3,556016$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4 = 4,230742$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5 = 11,572015$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6 = 11,658619$, AS-коливання). На рис.1,б крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_1 = 3,799316$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2 = 3,929859$, SA-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3 = 6,234196$, AS-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4 = 6,374857$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5 = 11,706880$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6 = 11,782537$, AS-коливання).

Варто відзначити також, що форми коливань на верхній границі першої зони пропускання і на нижній границі другої зони пропускання міняються місцями: при $\bar{k}=0,96$ це будуть відповідно AS- та SA-коливання, а при $\bar{k}=1,92$ стають відповідно SA- та AS-коливаннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Распространение объемных волн сдвига в слоистых композитах с межфазными дефектами // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1994. – Вып. 61. – С. 33-38.
2. Композиционные материалы. В 8-и т. Т.1. Поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
3. Механика композитов. В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.

4. Шульга М.О., Шульга Н.Д. Вплив міжфазних недосконалостей на структуру зон пропускання хвиль зсуву в шаруватих композитах // Деп. в ДНТБ України 13.02.1995 р. № 310 – Ук. 95 (Донецький ун-т. – Донецьк, 1994). – 39 с.
5. Шульга Н.Д. Частоти пропускання і граничні форми об’ємних хвиль поперек структури двокомпонентних шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 79. – С. 109-117.
6. Шульга Н.Д. Форми коливань на границях зон пропускання одномірних хвиль в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалостями // Системні технології. – 2007. – Вип. 4(51). – С. 44-49.

Получено 17.03.2008 р.